

Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации

Пермский государственный технический университет

Кафедра математического моделирования систем и процессов

П.Г.Фрик

# ТУРБУЛЕНТНОСТЬ: МОДЕЛИ И ПОДХОДЫ

Курс лекций

Часть I

Рекомендовано учебно-методическим отделом по направлению  
«Электроника и прикладная математика» в качестве учебного пособия  
для студентов специальности «Прикладная математика»

Пермь 1998

УДК 532.517.4

Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть I / П.Г.Фрик; Перм. гос. техн. ун-т. Пермь, 1998. 108 с.

Первая часть курса лекций включает в себя введение и три из семи разделов курса «Турбулентность: модели и подходы». Первый раздел содержит базовые сведения из механики жидкости, необходимые для дальнейшего изложения. Второй посвящен вопросам, связанным со стохастическим поведением маломодовых систем гидродинамического типа. В третьем разделе выводятся уравнения для статистических моментов пульсаций скорости и дается краткий обзор моделей, используемых для их замыкания.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.  
Ил.64. Библиогр. 12 назв.

Рецензенты: кафедра физики Пермского  
государственного технического университета,  
д-р физ.-мат.наук, профессор Д.В.Любимов

ISBN

1998

© Пермский государственный  
технический университет,

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 ОСНОВЫ.....	7
1.1 Уравнения движения жидкости .....	7
1.2 Устойчивость течений.....	21
1.3 Свободная конвекция несжимаемой жидкости.....	26
1.4 Конвективная устойчивость .....	31
1.5 Маломодовая модель конвекции (система Лоренца) .....	37
2 ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ .....	42
2.1 Консервативные и диссипативные системы.....	43
2.2 Бифуркации .....	50
Как описать переход и хаос ? .....	52
2.4 Спектры Фурье.....	58
2.5 Странный аттрактор.....	63
2.6 Фракталы.....	67
2.7 Субгармонический каскад .....	74
2.8 Некоторые примеры .....	79
3 ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....	92
3.1 Развивающаяся турбулентность .....	92
3.2 Уравнения для статистических моментов .....	99
3.3 Турбулентная вязкость .....	102
3.4 Длина пути смешения.....	103
3.5 Модели переноса турбулентной вязкости.....	105
3.6 Двухпараметрические модели .....	105

## ВВЕДЕНИЕ

Турбулентность остается одним из наиболее сложных объектов исследования механики жидкости и газа. За почти столетнюю историю ее изучения предложены десятки различных подходов, почти всегда отражающие наиболее активно развиваемые перспективные направления математики и физики соответствующего периода времени. Статистическая физика и теория вероятности, теория размерности, фурье анализ и прямые численные методы, теория динамических систем, теория фракталов и вейвлет-анализ - вот далеко не полный перечень областей науки, которые давали основные идеи исследователям турбулентности.

Теория турбулентности далека от своего завершения. Продолжают появляться и все новые подходы к ее изучению. Растет число моделей, предлагаемых для лучшего понимания отдельных ее свойств. Дать представление об основных идеях, движущих этот процесс, продемонстрировать возможности различных подходов и показать проблемы, ими не разрешенные, представить современные модели, не вошедшие еще в учебники и не ставшие хрестоматийными - вот цель предлагаемого курса лекций.

Курс предназначен для студентов специальности "прикладная математика", ориентирующихся на работу в научно-исследовательских учреждениях и на кафедрах, в особенности тех, что связаны с решением задач механики жидкости и газа. В то же время, в курсе рассматриваются и общие подходы к моделированию сложных динамических систем, которые могут быть полезными специалистам, занимающимся моделированием самых различных (и не только механических) систем и явлений. Курс рассчитан на студентов, получивших широкую базовую подготовку по основным математическим дисциплинам, включая методы математической физики, функциональный анализ и теорию вероятности, а также прослушавших спецкурсы по механике (механику сплошных сред, теорию определяющих соотношений).

Курс лекций состоит из двух частей. В первую часть включены три главы, включающие в основном сведения, которые можно найти в различных учебниках и монографиях, но собранные воедино и изложенные в свете задач, обсуждаемых в этом курсе. Вторая часть содержит результаты, которые, за редким исключением, не вошли еще в книги и могут быть найдены только в оригинальных статьях.

Первая глава содержит базовые сведения по динамике несжимаемых жидкостей, включая вывод уравнений движения для идеальной и вязкой жидкости и примеры задач, имеющих точные решения. Даны основы тео-

рии устойчивости, имеющей важнейшее значение в понимании проблем перехода от ламинарных течений к турбулентным. Подробно обсуждаются две задачи : устойчивость плоского течений Пуазейля (задача Орра-Зоммерфельда) и задача Релея о конвективной устойчивости подогреваемого снизу горизонтального слоя несжимаемой жидкости. Последняя задача предворяется выводом уравнений свободной конвекции в приближении Буссинеска и обсуждением необходимых условий устойчивости неоднородно нагретой жидкости, находящейся в поле сил тяжести. Особое внимание уделяется вопросу о безразмерном представлении уравнений движения, о законах подобия и о безразмерных параметрах и их роли в описании процессов перехода к хаотическому поведению. Глава заканчивается выводом маломодовой модели конвекции (модель Лоренца). Этот вывод имеет методическую цель - показать и обсудить проблему проектирования нелинейных уравнений движения на конечномерный базис и переход от уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В то же время подробный вывод модели полезен, так как полученная система уравнений широко используется в следующей главе, где подробно обсуждаются ее свойства.

Значительный прогресс в понимании природы и свойств турбулентности произошел в последние десятилетия благодаря успехам теории динамических систем, позволившим понять как хаотическое поведение возникает в детерминированных системах. Этим результатам посвящена вторая глава, в которой приводятся базовые сведения из теории динамических систем и обсуждаются некоторые приложения. Вводится понятие фазового пространства и даны примеры фазовых портретов некоторых простых динамических систем. Обсуждаются особенности эволюции консервативных и диссипативных систем. Для диссипативных систем вводится понятие аттрактора, обсуждаются свойства аттракторов стохастических систем. Излагаются краткие сведения из теории фракталов, дается понятие обобщенной размерности и описаны алгоритмы определения размерности аттракторов стохастических систем. Даны основы теории бифуркаций, рассмотрены некоторые методы исследования перехода к хаосу и характеристики динамических систем при периодическом и хаотическом поведении (сечения Пуанкаре, показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова, спектры Фурье). Описаны и обсуждены основные сценарии перехода от порядка к хаосу: сценарий Ландау, сценарий Рюэля и Таккенса, субгармонический каскад. В заключение главы рассматриваются примеры гидродинамических систем, демонстрирующих хаотическое поведение. Проведен подробный анализ поведения модели Лоренца, уравнения которой выведены в первой главе. Рассмотрена также простейшая модель генерации магнитного поля Земли (динамо Рикитаки), воспроизводящая эффект случайных перебросов направления магнитного поля. Показаны и обсуждены также результаты

экспериментального наблюдения хаотизации конвективного течения в замкнутой полости.

В третьей главе начинается знакомство с методами описания развитой турбулентности, а именно, с исторически первым и наиболее развитым подходом к описанию турбулентных потоков. Это подход Рейнольдса и выросшие из него многочисленные полуэмпирические модели турбулентности. Начинается глава с определения статистических моментов случайных полей, характеризующих турбулентный поток. Далее дан вывод уравнения Рейнольдса для средних полей и обсуждаются вопросы, связанные с появлением в уравнениях тензора напряжений Рейнольдса. Показано, как получается цепочка уравнений Фридриха-Келлера и формулируется проблема замыкания. Разговор о путях решения этой проблемы начинается с описания гипотезы Буссинеска для тензора напряжений, определения понятия турбулентной вязкости, описания и обсуждения модели пути смешения Прандтля. В последующих параграфах рассмотрены более сложные модели: модели переноса турбулентной вязкости и двухпараметрические модели типа  $k-\varepsilon$  модели. Полуэмпирическим моделям в предлагаемом курсе лекций уделено сравнительно скромное место по двум причинам. Во-первых, именно этот подход наиболее полно освещен в литературе и может быть свободно изучен по учебникам. Во-вторых, основной целью данного курса является знакомство с методами изучения свойств мелкомасштабной турбулентности (однородной изотропной турбулентности), которая как раз и остается за полем зрения полуэмпирических моделей. Поэтому описание этих подходов необходимо только для общего знакомства с идеологией метода, дающего возможность ссылаться на него в дальнейшем и проводить необходимые сравнения.

# 1 ОСНОВЫ

## 1.1 Уравнения движения жидкости

Гидродинамика - это раздел механики сплошных сред, описывающий движение жидкостей и газов в рамках модели сплошной среды. Последнее означает, что рассматриваются масштабы  $l \gg \lambda$ , где  $\lambda$  - длина свободного пробега молекул.

Рассматривается физически бесконечно малый объем, и вводятся характеристики среды: скорость  $\vec{v}$  и две термодинамические величины: давление  $P$  и плотность  $\rho$ .

### 1.1.1 Уравнение непрерывности

Законы движения выводятся из законов сохранения. Сначала используется закон сохранения вещества. В пространстве фиксируется некоторый объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ , масса которого равна

$$m = \int_V \rho dV .$$

Изменение массы этого объема есть

$$\frac{\partial}{\partial t} m = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV ,$$

а вытекающий из объема поток жидкости

$$\oint_S \rho v_n dS .$$

Если за положительное направление принять направление движения из рассматриваемого объема, то условие сохранения массы можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \oint_S \rho v_n dS .$$

Правая часть равенства преобразуется по теореме Остроградского-Гаусса

$$\oint_S \rho v_n dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV .$$

Тогда

$$\int \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 ,$$

а так как равенство должно быть справедливо для любого объема, то подынтегральное выражение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 , \quad (1.1)$$

которое называют уравнением непрерывности (неразрывности). Для несжимаемой жидкости плотность есть величина постоянная ( $\rho = \text{const}$ ) и уравнение (1.1) упрощается:

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

Важно отметить, что уравнение неразрывности справедливо и для идеальной, и для реальной жидкости.

### 1.1.2 Идеальная жидкость

Уравнения для скорости выведем сначала для идеальной жидкости. Идеальная жидкость- это жидкость без вязкости и теплопроводности.

Закон сохранения импульса для движущегося жидкого объема есть

$$\frac{d}{dt} \left( \int \rho \vec{v} dV \right) = \sum F_i ,$$

где в правой части стоит сумма всех сил, действующих на выделенный объем. Ограничиваясь рассмотрением силы тяжести и сил давления, запишем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{g} dV + \oint_S (-P) dS .$$



Учитывая, что  $\int \frac{d\rho}{dt} dV \equiv 0$  (интеграл берется по жидкой частице, то есть по заданному количеству жидкости, а не по заданному объему), можно переписать уравнение в виде

$$\int \rho \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \int (\rho \vec{g} - \nabla P) dV$$

и, снова исходя из произвольного выбора объема частицы, перейти к дифференциальной форме

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (1.3)$$

Входящая в уравнение производная  $\frac{d\vec{v}}{dt}$  - это субстанциональная производная, которая описывает изменение скорости жидкой частицы. Рассмотрение движения отдельных жидких частиц называется подходом Лагранжа к описанию движения жидкости. В большинстве случаев предпочтительным является подход Эйлера, который заключается в описании характеристик жидкости в заданной точке. Чтобы получить уравнение движения в форме Эйлера, нужно получить связь между субстанциональной и локальной производными. Запишем приращение скорости

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

и получим из него связь субстанциональной (полной) производной по времени с частной производную скорости по времени (изменение скорости в заданной точке)

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z},$$

или

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}. \quad (1.4)$$

Используя полученное соотношение, приходим к уравнению Эйлера, полученному им еще в 1755 г.:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g}. \quad (1.5)$$

Гидростатическое приближение получается при условии отсутствия движения, то есть равенства нулю скорости и производной по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \dot{\vec{v}} = 0.$$

Таким образом,

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} = 0, \quad (1.6)$$

или  $\nabla p = \rho \vec{g}$ . Учитывая, что сила тяжести направлена вертикально вниз и считая, что по вертикали направлена координата  $z$ , т.е.  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ , получим

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \quad \text{а} \quad P = P_0 - \rho g z.$$

Запишем теперь поток импульса в тензорных обозначениях. Отметим, что в дальнейшем мы иногда производную по времени будем обозначать как  $\partial_t$ .

$$\partial_t(\rho v_i) = \rho \partial_t v_i + \partial_t \rho v_i$$

Уравнение непрерывности перепишем в виде

$$\partial_t \rho - \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = 0,$$

а уравнение Эйлера (1.5) в виде

$$\partial_t v_i = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}.$$

Подставим две последние формулы в выражение для изменения импульса:

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v_i) &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) = \\ &= -\delta_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\delta_{ik} P + \rho v_i v_k) \end{aligned}$$

и введем тензор плотности потока импульса, описывающий перенос  $i$ -ой компоненты импульса через площадку, перпендикулярную  $k$ -ой оси

$$\Pi_{ik} = \delta_{ik} P + \rho v_i v_k . \quad (1.7)$$

Тогда уравнение для изменения импульса запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} , \quad (1.8)$$

а для конечного объема

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho v_i dV = \int_V - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} dV = - \oint_S \Pi_{ik} dS_k .$$

Нами не использован закон сохранения энергии. Напомним, что рассматривается идеальная жидкость, а это означает, что в жидкости отсутствуют теплообмен и трение. В таком случае движение адиабатично в каждой жидкой частице. Следовательно, закон сохранения энергии выливается в утверждение, что энтропия каждого жидкого элемента остается постоянной

$$\frac{dS}{dt} = 0 .$$

Переходя от переменных Лагранжа к переменным Эйлера, получаем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (v \nabla) S = 0 . \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Реальная жидкость

Реальная жидкость - это жидкость с вязкостью (внутренним трением) и теплопроводностью. Начнем с рассмотрения уравнений движения для изотермической жидкости и для начала еще раз напомним, что уравнение непрерывности (1.1) справедливо и для реальной жидкости, так как его вывод основывался только на законе сохранения вещества. Далее воспользуемся уравнением Эйлера, записанным в форме закона для переноса импульса (1.7)-(1.8), и попытаемся дописать в него слагаемые, отвечающие за перенос импульса в результате действия вязких сил

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) &= - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} + \text{поток импульса из - за вязкости}) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \sigma'_{ik}) \end{aligned}$$

где величина  $\sigma_{ik} = p\delta_{ik} - \sigma'_{ik}$  называется тензором напряжений, а  $\sigma'_{ik}$  - тензором вязких напряжений.

Тензор вязких напряжений  $\sigma'_{ik}$  должен характеризовать неоднородности поля скорости, которые можно описать производными поля скорости

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \dots$$

Требуется угадать форму зависимости тензора вязких напряжений от этих производных. На этом этапе делается самое важное ограничение на пути получения уравнения движения. Оно состоит в том, что учитываются только линейные комбинации первых производных поля скорости. Кажется естественным, что однородное поле скорости не приводит к появлению вязких напряжений. Нужно, однако, учесть, что есть специальный случай, когда поле скорости неоднородно, а вязкие напряжения возникать не должны. Это случай твердотельного вращения жидкости.

Существуют только две линейные комбинации первых производных, удовлетворяющие этому требованию. Это

$$\left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad \text{и} \quad \text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$$

(здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам).<sup>1</sup>

Общий вид тензора второго ранга, удовлетворяющего поставленным условиям, есть

$$\sigma'_{ik} = a \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + b \delta_{ik} \text{div } \vec{v} \quad .$$

Принята несколько иная форма записи

<sup>1</sup> Убедимся, что эти две комбинации равны нулю при твердотельном вращении жидкости.

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$$v_x = \Omega_y z - \Omega_z y$$

$$v_y = \Omega_z y - \Omega_x z$$

$$v_z = \Omega_x y - \Omega_y x$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = -\Omega_z + \Omega_z = 0 \quad \text{è } \partial . \ddot{a} . \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\sigma'_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \xi \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (1.10)$$

удобная тем, что сумма диагональных членов в скобке равна нулю. В выражении присутствуют два коэффициента:

- η -сдвиговая вязкость
- ξ -объемная (вторая) вязкость.

Таким образом, уравнение движения приобретает вид

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \eta \left( \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \xi \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right). \quad (1.11)$$

Коэффициенты вязкости зависят от температуры и давления и не являются постоянными вдоль жидкости. Однако, во многих случаях можно считать эту зависимость слабой и вынося коэффициенты вязкости за операторы дифференцирования, прийти к виду

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \vec{v} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (1.12)$$

который и принято называть уравнением Навье-Стокса. Важным частным случаем является случай несжимаемой жидкости. Тогда уравнения движения (1.1), (1.12) записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{v} \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $\nu = \eta / \rho$  - коэффициент кинематической вязкости.

Для решения конкретной задачи уравнения должны быть дополнены граничными условиями (например, условие прилипания на твердой границе или условие отсутствия касательных напряжений на свободной границе).

Основные проблемы решения уравнений Навье-Стокса связаны с нелинейным членом. Известно небольшое число задач, в которых этот член обращается в нуль и задачи приводят к точным решениям. Приведем только два хорошо известных примера таких задач.

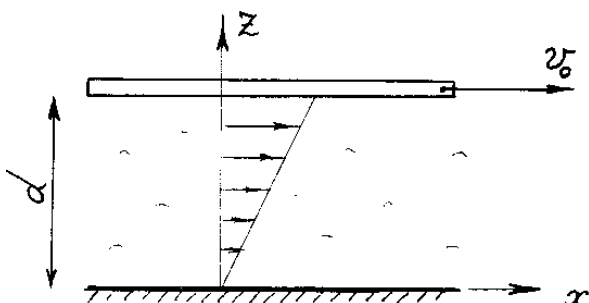


Рис. 1.1.

Течение Куэтта. Рассматривается течение несжимаемой жидкости в горизонтальном слое толщиной  $d$ , нижняя граница которого неподвижна, а верхняя движется с постоянной

горизонтальной скоростью  $v_0$ , направленной вдоль оси  $x$ . Ось  $z$  направлена вертикально вверх. Ищется стационарное решение, то есть производная по времени равна нулю. Считается также, что задача плоская, то есть нет зависимости от координаты  $y$  и нет соответствующей компоненты скорости ( $v_y = 0$ ). Более того, течение горизонтально и  $v_z = 0$ . Отсутствует также горизонтальный градиент давления.

Из уравнения непрерывности немедленно следует, что оставшаяся компонента скорости не может зависеть от координаты  $x$ :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Следовательно,  $v_x = f(z)$ , и нелинейный член исчезает

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0.$$

В результате, от уравнения Навье-Стокса остается

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad v_x = az + b.$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий

$$v_x = 0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

$$v_x = v_0 \quad \text{при} \quad z = d$$

и получается результат

$$v_x = v_0 \frac{z}{d}.$$

При этом, отлична от нуля только одна компонента тензора вязких напряжений

$$\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{v_0}{d} \eta,$$

с которой просто связана сила, действующая на площадку поверхности площадью  $S$

$$F = \frac{v_0 \eta S}{d}.$$

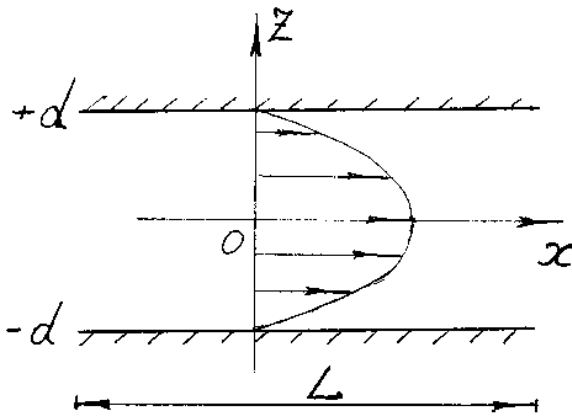


Рис. 1.2.

Течение Пуазейля. Второй хорошо известный пример задачи о течении вязкой жидкости, имеющей точное решение, является задача Пуазейля о течении жидкости в слое с твердыми границами (или трубе) под действием приложенной к краям разности давления. Рассмотрим сначала плоский горизонтальный слой толщиной  $2d$  и длиной  $L$ , на концах которого задано давление  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно. Как и в предыдущей задаче, ищем стационарное решение ( $\partial_t = 0$ )

только для компоненты скорости  $v_x$  ( $v_y = v_z = 0$ ) и по тем же причинам  $\partial_x = \partial_y = 0$ . В этом случае снова исчезает нелинейный член, так как возникающий градиент скорости направлен перпендикулярно самой скорости. Тогда уравнение Навье-Стокса принимает вид

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0,$$

а его решение, с учетом граничных условий ( $v_x = 0$  при  $z = \pm d$ ) есть

$$v_x = \frac{P_1 - P_2}{2\eta L} (z^2 - d^2).$$

Для цилиндрической трубы радиуса  $R$  задача решается аналогично. В этом случае оператор Лапласа нужно записать в цилиндрической системе координат

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{P_1 - P_2}{L\eta}$$

и его решение примет вид

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + C \ln r + B.$$

Постоянная интегрирования  $C = 0$ , так как при  $r = 0$  значение скорости должно быть конечно. Определив вторую константу из условия прилипания на стенке трубы, получим

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} (R^2 - r^2).$$

Важной характеристикой является расход жидкости, протекающей через трубу. Для него имеем

$$Q = 2\pi \int_0^R \rho r v dr = \frac{\pi \rho (P_1 - P_2)}{8\eta L} R^4.$$

#### 1.1.4 Число Рейнольдса

Полученные уравнения движения несжимаемой жидкости приведем к безразмерному виду. Имеем (1.13),

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \vec{v},$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

В уравнения входят следующие физические величины: время  $t$ , расстояние  $l$ , скорость  $v$ , плотность  $\rho$ , давление  $P$  и вязкость  $\nu$ . Если мы принимаем систему единиц СИ, то каждая из этих величин будет иметь следующую размерность:

$$[t] = \text{с}; \quad [l] = \text{м}; \quad [v] = \text{м/с}; \quad [\rho] = \text{кг/м}^3; \quad [P] = \text{кг/м} \cdot \text{с}^2; \quad [\nu] = \text{м}^2/\text{с}.$$

Идея обезразмеривания состоит в том, чтобы измерять все величины в единицах, являющихся характерными параметрами конкретной задачи. Так, например, в качестве единицы измерения длины можно выбрать некий характерный размер  $L$  (это может быть толщина слоя жидкости, диаметр трубы, размер обтекаемого тела и т.д.), за единицу измерения скорости - характерную скорость  $V$  (скорость верхней пластины в течении Куэтта, скорость на оси трубы в течение Пуазейля, скорость набегающего потока в задачах об обтекании тела и т.д.). Единица измерения времени выражается через две введенные величины и есть  $L/V$ , а единицей давления может служить величина  $\rho V^2$ .

Безразмерные величины (обозначим их буквами с тильдами) будут связаны со старыми, размерными величинами как

$$\tilde{v} = v/V, \quad \tilde{x}_i = x_i/L, \quad \tilde{t} = tV/L, \quad \tilde{P} = P/\rho V^2, \quad \tilde{\nabla} = L\nabla, \quad \tilde{\Delta} = L^2\Delta.$$



Подставляя эти соотношения в уравнения движения, получим

$$\frac{V^2}{L} \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tilde{t}} + \frac{V^2}{L} (\tilde{\mathbf{v}} \tilde{\nabla}) \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{V^2}{L} \tilde{\nabla} \tilde{P} + \nu \frac{V}{L^2} \Delta \tilde{\mathbf{v}}$$

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} = 0,$$

а сокращая подобные множители и опуская тильды, приходим к уравнениям

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \nabla) \bar{\mathbf{v}} = -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \bar{\mathbf{v}}$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (1.14)$$

где безразмерная величина  $R = \frac{VL}{\nu}$  называется числом Рейнольдса.

Это число характеризует отношение инерционных сил к вязким (нелинейного члена к вязкому) и именно оно является критерием, определяющим этапы перехода от ламинарных течений к турбулентным.

Важно подчеркнуть, что приведенный способ обезразмеривания уравнений не является единственно возможным. Например, в качестве единицы времени можно взять величину  $L^2/\nu$ , характеризующую время вязкой диссипации, а в качестве единицы скорости - величину  $\nu/L$ . Переходя к безразмерным переменным, в этом случае получим уравнение

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \nabla) \bar{\mathbf{v}} = -\nabla P + \Delta \bar{\mathbf{v}},$$

не содержащее каких-либо параметров. Не следует думать, что таким образом мы получили уравнение, лишенное параметра. В действительности, роль числа Рейнольдса выполняет теперь безразмерная скорость. Если при первом способе обезразмеривания безразмерная скорость по определению лежала в интервале  $[0,1]$  (или вблизи него), то при втором способе единичной является скорость вязкого переноса, а безразмерная скорость может достигать величин порядка

$$\tilde{v} = \frac{\nu}{\nu/L} \approx \frac{VL}{\nu},$$

то есть является аналогом числа Рейнольдса.

С числом Рейнольдса тесно связан вопрос о подобии различных течений, то есть вопрос о том, каким критериям должна удовлетворять модель исследуемого течения. Пусть рассматривается определенный тип тече-

ний жидкости (например, течение по трубам или обтекание тел определенной формы). Очевидно, что для моделирования движения нужно в первую очередь обеспечить геометрическое подобие. Тогда геометрические свойства задачи определяются одним линейным размером  $L$ .

Из параметров, характеризующих жидкость, в уравнения входит только кинематическая вязкость  $\nu$  (поля скорости  $\vec{v}$  и давления, отнесенного к плотности,  $P/\rho$  являются неизвестными функциями, которые необходимо найти). Если рассматривается обтекание тела потоком, то характеристикой течения в целом является скорость потока (на бесконечности)  $V$ . Мы видим, что в рамках заданного типа движений решение определяется тремя параметрами:  $\nu, V, L$ . Из этих трех размерных величин можно составить только одну безразмерную комбинацию, а именно, введенное выше число Рейнольдса. Искомые поля (опять же, для заданного типа течений) должны будут выражаться зависимостями вида

$$\vec{v} = Vf_1\left(\frac{\vec{r}}{L}, R\right), \quad P = \rho V^2 f_2\left(\frac{\vec{r}}{L}, R\right).$$

Суть закона подобия, сформулированного Рейнольдсом в 1883 году, состоит в том, что течения одного типа с равным числом Рейнольдса подобны. Подобие двух течений состоит в том, что все поля могут быть получены друг из друга простым масштабным преобразованием координат и скорости.

Если в задаче появляется дополнительный параметр, то из имеющихся четырех величин можно составить два независимых безразмерных комплекса и для обеспечения подобия задач потребуется обеспечить равенство обоих безразмерных параметров. Так, если в рассматриваемом течении существенно влияние сил тяжести, то в качестве дополнительного размерного параметра в задачу входит ускорение силы тяжести  $g$ . Тогда новым безразмерным параметром может служить число Фруда

$$F = \frac{V^2}{Lg},$$

являющееся мерой отношения кинетической энергии движущейся жидкости к потенциальной.

### 1.1.5 Течение в диффузоре

Мы рассмотрели выше два простейших примера точных решений уравнений Навье-Стокса. Известно еще несколько задач, для которых

найденны точные решения. Это, например, задача о затопленной струе, задача о течении вблизи вращающегося диска, течение в диффузоре и некоторые другие. Не воспроизводя решения задачи, остановимся на течение жидкости в плоском диффузоре (задача Гамеля, 1917г.).

Плоский диффузор образован двумя полу-плоскостями, выходящими из начала координат под углом  $\alpha$  (рис.1.3). В начале координат находится источник жидкости мощностью  $Q$ . Если  $Q < 0$ , то источник становится стоком, а устройство называется конфузором.

Решение ищется в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  для чисто радиального течения ( $v_\varphi = v_z = 0; v_r = v(r, \varphi)$ ). Уравнение непрерывности, записанное в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

показывает, что  $(rv)$  не зависит от радиуса и может быть только функцией угла  $\varphi$ . Решение поэтому ищется для автомодельной переменной

$$u(\varphi) = \frac{1}{6\nu} rv.$$

Вид решения, получающегося для конфузора при малых и больших числа Рейнольдса, иллюстрирует рис.1.4.

Интересной особенностью задачи Гамеля является то, что для конфузора (втекание жидкости,  $Q < 0$ ) решение существует для любых значений

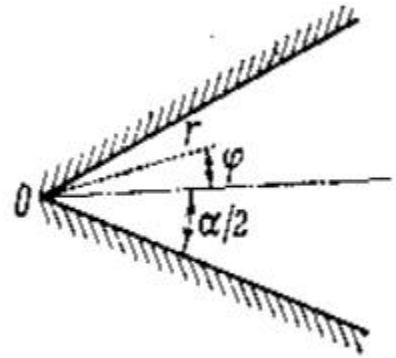


Рис. 1.3.

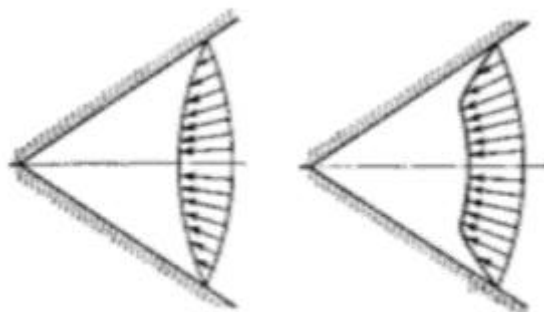


Рис. 1.4.

числа Рейнольдса, которое определяется через расход и есть

$$R = \frac{|Q|}{\rho v},$$

а для диффузора ( $Q > 0$ ) симметричное расходящееся течение существует только при ограниченных значениях числа Рейнольдса  $R < R_{\max}$  и ограниченных значениях угла раствора  $\alpha < \alpha_{\max}$ . Предельные параметры связаны простым соотношением

$$R_{\max} = 6 \left( \frac{\pi^2}{\alpha} - \alpha \right),$$

которое определяет область существования симметричных решений на плоскости  $(R, \alpha)$  (см. рис.1.5). При  $R > R_{\max}$  существуют только несимметричные решения, в которых имеются области возвратных течений. Примеры профилей скорости, соответствующих таким решениям, приведены на рис.1.6. Важно отметить, что решение в конфузоре при  $R \rightarrow \infty$  стремится к решению для идеальной жидкости (столбообразное течение с проскальзыванием на границе), а в диффузоре предельного перехода нет: при  $R \rightarrow \infty$  число перегибов в решении неограниченно возрастает.

Задача о диффузоре интересна тем, что является примером задачи, в которой существует граничное значение числа Рейнольдса, при превышении которого решение данного вида не существует. Не следует путать этот случай с ситуацией, когда решение в принципе существует, но не реализуется в силу возникающей неустойчивости. Об этом пойдет речь далее.

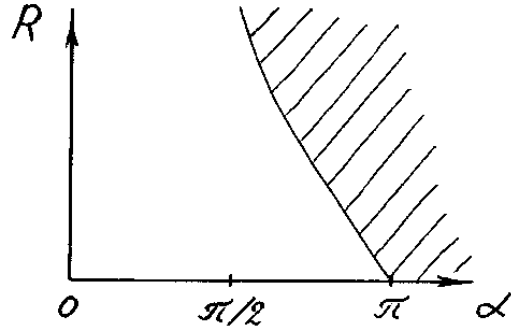


Рис. 1.5.

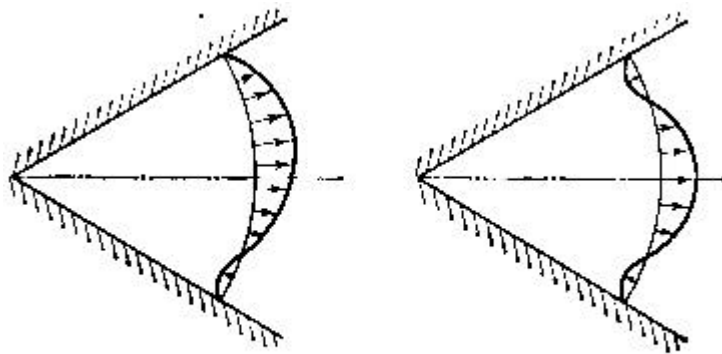


Рис. 1.6.

## 1.2 Устойчивость течений

Вопрос об устойчивости того или иного состояния (решения, режима) возникает в самых разных задачах. Достаточно вспомнить простейший пример об устойчивости шарика, лежащего на различных поверхностях (рис.1.7). В первом случае положение шарика абсолютно устойчиво, то есть при любом конечном воздействии шарик по окончании действия возмущающей силы возвращается в исходное состояние. Во втором случае положение шарика абсолютно неустойчиво - любое, сколь угодно малое возмущение, безвозвратно уводит его из начального положения. Третий случай иллюстрирует пример состояния, устойчивого по отношению к малым возмущениям, но нарушающегося, если возмущения превышают критическую величину.



Рис. 1.7.

Нас интересует вопрос об устойчивости стационарных течений. Для конкретности будем говорить о течении Пуазейля. Возмущения в реальных течениях существуют всегда. Их источником служат шероховатости стенок, входные участки (бесконечных труб нет), просто флуктуации характеристик самой жидкости и т.д. Нужно ответить на вопрос о том, какое возмущение является самым опасным и где та граница, при превышении которой это возмущение приведет к разрушению существующего течения.

Итак, имеем течение несжимаемой жидкости, для которой запишем уравнения Навье-Стокса в безразмерной форме (1.14)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \vec{v},$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Стационарное решение задачи (имеем в виду течение Пуазейля, хотя до определенного этапа все рассуждения не зависят от конкретного вида решения) обозначим как  $v_0, P_0$ . Это решение, в свою очередь, удовлетворяет уравнениям

$$(\vec{v}_0 \nabla) \vec{v}_0 = -\nabla P_0 + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}_0, \quad (1.15)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}_0 = 0.$$

Поля скорости и давления представим в виде сумм стационарных решений и возмущений

$$\begin{aligned}\bar{v}(x, y, z, t) &= \bar{v}_0(z) + \bar{v}'(x, y, z, t), \\ P(x, y, z, t) &= P_0(z) + P'(x, y, z, t).\end{aligned}\quad (1.16)$$

Отметим, что в отличие от исследуемого стационарного решения, слагаемые со штрихами описывают возмущения, которые могут зависеть от времени и от всех координат. Введенные разложения подставляются в исходные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v}_0 \nabla) \bar{v}' + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}_0 + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' &= -\nabla P_0 - \nabla P' + \frac{1}{R} \Delta \bar{v}_0 + \frac{1}{R} \Delta \bar{v}' \\ \operatorname{div} \bar{v}_0 + \operatorname{div} \bar{v}' &= 0\end{aligned}\quad (1.17)$$

и, после вычитания из них уравнений для стационарных решений (1.15), получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}_0 + (\bar{v}' \nabla) \bar{v}' &= -\nabla P' + \frac{1}{R} \Delta \bar{v}', \\ \operatorname{div} \bar{v}' &= 0.\end{aligned}\quad (1.18)$$

Наибольшие трудности в решении этих уравнений представляет нелинейное по искомым возмущениям слагаемое  $(\bar{v}' \nabla) \bar{v}'$ . Следующий, принципиальный шаг состоит в том, что это слагаемое отбрасывается. Тем самым мы ограничиваем себя рамками линейной теории устойчивости, рассматривающей эволюцию малых возмущений. Это значит, что

$$|\bar{v}'| \ll |\bar{v}_0|.$$

Линейная теория работает только вблизи порога возникновения неустойчивости. По прохождению порога, возмущения нарастают и линейные уравнения перестают работать. Тем не менее, поставленная задача при этом может считаться выполненной, так как требовалось указать именно сам порог и наиболее опасные возмущения, которые начинают нарастать в первую очередь.

Отказавшись от написания штрихов, мы приходим к системе уравнений, которую необходимо дополнить граничными условиями для возмущений. Например, можно предположить, что на границах возмущения равны нулю.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}_0 \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}_0 &= -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \vec{v}, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \vec{v} \Big|_{\bar{A}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее делают еще ряд существенных упрощений. Первое состоит в том, что рассматриваются только плоские возмущения. Этот шаг оправдывается теоремой Сквара, которая утверждает, что самыми опасными являются именно плоские возмущения. Такое предположение означает, что

$$\vec{v} = (v_x, 0, v_z) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} = 0.$$

С учетом того, что

$$(\vec{v}_0 \nabla) = v_0 \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad (\vec{v} \nabla) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

уравнения движения для оставшихся двух компонент запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_0}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{R} \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_z}{\partial x} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta v_z, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Следующий шаг состоит в том, что вводится функция тока  $\psi$ , связанная с компонентами вектора скорости:  $v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$ ,  $v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ . Введение функции тока позволяет уменьшить число переменных. Платой за это является повышение порядка дифференциальных уравнений, которые принимают вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} - v_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{R} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} + v_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R} \Delta \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение (это уравнение непрерывности) выполняется тождественно. Это не удивительно, так как функция тока вводится именно для

несжимаемой жидкости. Следующий шаг также является общепринятым - для того, чтобы избавиться от давления и получить одно уравнение для функции тока, необходимо второе уравнение продифференцировать по координате  $x$  и вычесть из него первое, продифференцированное по координате  $z$ . Результирующее уравнение есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial z} + \frac{1}{R} \Delta \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Сокращая подобные члены и учитывая, что  $\partial v_0 / \partial x = 0$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - v_0'' \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi, \quad (1.20)$$

которое дополняется граничными условиями для функции тока:

$$\text{и } \delta \text{ } z = \pm 1: \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

Напомним, что функция тока введена для возмущений поля скорости, возникающих на фоне стационарного течения  $\vec{v}_0$ . Штрихами обозначено дифференцирование по вертикальной координате  $z$ .

Полученное уравнение (1.20) можно решать численно, задавая различные начальные возмущения и наблюдая за их эволюцией при различных числах Рейнольдса. Этот путь не снимает, однако, вопроса о выборе вида возмущений. Следуя обычному для теории устойчивости способу, будем рассматривать нормальные возмущения, то есть возмущения вида

$$\psi(x, z, t) = \varphi(z) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.21)$$

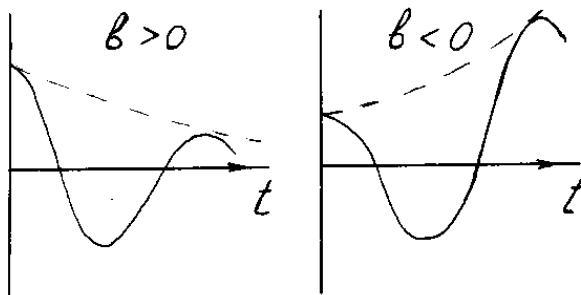


Рис. 1.8.

При это фактически мы провели разделение переменных, включив зависимость от вертикальной координаты  $z$  только в амплитуду возмущений  $\varphi$ . Зависимость от продольной координаты и времени принята в виде гармонических волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  ( $\omega$  - частота,  $k$  - волновое



число). Частота является величиной комплексной:  $\omega = a + ib$ , что позволяет переписать выражение для нормальных возмущений в виде

$$\psi(x, z, t)\varphi(z)e^{i(\omega t - kz)} = \varphi(z)e^{-bt}e^{i(at - kz)}.$$

Характер эволюции колебаний во времени определяется мнимой частью частоты: если  $b > 0$ , то возмущения убывают со временем, а если  $b < 0$ , то возмущения нарастают (см. рис.1.8). Именно знак величины  $b$  и интересен с точки зрения вопроса об устойчивости течения. Требуется узнать, при каком значении числа Рейнольдса появляется решение с отрицательным  $b$  и какое волновое число  $k$  соответствует этому решению.

Возмущения в нормальной форме подставляются теперь в уравнение для функции тока. Соответствующие производные определяются формулами:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i\omega\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -ik\psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \varphi' e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = (\varphi'' - k^2\varphi)e^{i(\omega t - kz)},$$

$$\Delta \Delta \psi = [\varphi^{IV} - k^2\varphi'' - k^2(\varphi'' - k^2\varphi)]e^{i(\omega t - kz)} = (\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi)e^{i(\omega t - kz)}.$$

После подстановки получаем

$$\left[ i\omega(\varphi'' - k^2\varphi) - ikv_0(\varphi'' - k^2\varphi) + ikv_0''\varphi = \frac{1}{R}(\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) \right] e^{i(\omega t - kz)}$$

$$(i\omega - ikv_0)(\varphi'' - k^2\varphi) + ikv_0''\varphi = \frac{1}{R}(\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi),$$

а после деления на  $ik$  и добавления граничных условий приходим к окончательной форме уравнения, называемого уравнением Орра-Зоммерфельда (1937г.):

$$\left( v_0 - \frac{\omega}{k} \right) (\varphi'' - k^2\varphi) - v_0''\varphi = \frac{i}{kR} (\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi), \quad (1.22)$$

$$\varphi|_{z=\pm 1} = 0 \quad \varphi'|_{z=\pm 1} = 0.$$

Задача остается чрезвычайно сложной и впервые для плоского слоя была решена только в 1945 г. Линем. Поучительна история решения этого уравнения. Первые подходы были связаны с попытками решать уравнение Орра-Зоммерфельда с отброшенной правой частью. Соответствующее

уравнение называют уравнением Релея. Отметим, что отбрасывая члены с четвертой производной  $\varphi^{IV}$ , мы лишаемся возможности использовать все граничные условия и можем требовать обращения в нуль только нормальной компоненты скорости (этому соответствует условие  $\partial\psi/\partial x = 0$  и  $\varphi = 0$ ). Отбрасывание правой части мотивировалось тем, что она описывает действие вязкости, а вязкость, казалось, должна играть стабилизирующую роль. Результат решения уравнения Релея состоял в том, что оно оказывалось абсолютно устойчивым.

Линь показал, что фазовая скорость возмущений  $v_\phi = \omega/k$  меньше максимальной скорости потока в центре слоя. Точки, в которых фазовая скорость возмущений совпадает со скоростью основного течения, являются критическими и именно вблизи этих точек начинается нарастание возмущений. Основным результатом исследования уравнения Орра-Зоммерфельда качественно иллюстрируется рисунком 1.9, на котором представлена так называемая нейтральная кривая, нарисованная на плоскости  $k-R$ . Область неустойчивости заштрихована. Критические параметры отмечены на рисунке звездочками. Наименьшее значение числа Рейнольдса, при котором начинается рост возмущений  $R^* = 5700$ . Соответствующее ему критическое значение волнового числа  $k^* \approx 1$ . Это означает, что наиболее опасными возмущениями являются возмущения с длиной волны, превышающей толщину слоя приблизительно в  $2\pi$  раз.

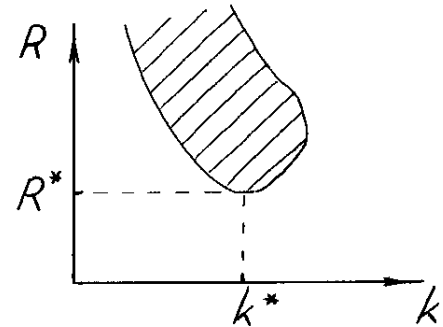


Рис. 1.9.

Интересна еще одна особенность нейтральной кривой. При некоторых значениях волнового числа в область неустойчивости можно попасть и двигаясь от больших чисел Рейнольдса к малым. Это означает, что вязкость может играть и дестабилизирующую роль.

### 1.3 Свободная конвекция несжимаемой жидкости

Под свободной конвекцией понимают движения жидкости, возникающие за счет сил Архимеда при наличии неоднородности плотности жидкости в поле массовых сил. В основном будем рассматривать термогравитационную конвекцию, т.е. случай, когда неоднородности жидкости связаны с ее неравномерным нагревом и течение возникает в поле силы тяжести. При этом будем иметь в виду жидкости, плотность которых падает с ростом температуры, т.е.  $\partial\rho/\partial T < 0$  (напомним, что аномальное поведе-

ние дает вода в интервале от 0 до 4° C). Считаем, что неоднородность температуры является единственным источником движения и что

$$\Delta\rho \ll \rho ,$$

т.е. рассматривается слабая конвекция. В уравнении движения появляется слагаемое, описывающее действие силы тяжести

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

и нужно учесть изменения плотности. Последняя в общем случае есть функция температуры и давления  $\rho = \rho(T, P)$ , а приращение плотности есть

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T dP .$$

Далее делается важное ограничение, состоящее в том, что рассматривается несжимаемая жидкость, означающее что вторым слагаемым в этом равенстве можно пренебречь. Таким образом, полагается, что плотность зависит только от температуры:  $\rho = \rho(T)$ , а приращение плотности есть

$$d\rho = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \rho_0 dT = -\beta \rho_0 dT .$$

Здесь  $\beta$  - коэффициент объемного расширения. Температуру жидкости представим в виде

$$T = T_0 + T' , \quad (1.23)$$

где  $T_0$  - средняя температура, а  $T'$  - вариации температуры, малые в том смысле, что вызываемые ими вариации плотности остаются малыми ( $\Delta\rho \ll \rho$ ). Плотность представляется, соответственно, в виде  $\rho = \rho_0 + \rho'(T)$ , где  $\rho_0$  - плотность жидкости при температуре  $T_0$ . Из сказанного выше следует, что

$$\rho' = -\rho_0 \beta T'$$

или

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta T') . \quad (1.24)$$

Принятое ограничение слабой конвекции предполагает, что  $\beta T' \ll 1$ . Вспомним, что для воды  $\beta = 2 \cdot 10^{-4}$ , и следовательно приближение годится

практически для любых возможных разностей температуры. Для газов  $\beta \approx 1/273$ , что существенно больше, но также позволяет пользоваться принятыми ограничениями при достаточно больших разностях температуры.

Изотермической жидкости с температурой  $T = T_0$  и соответствующей этой температуре плотностью  $\rho = \rho_0$  отвечает гидростатическое давление  $P_0$ , подчиняющееся уравнению

$$\nabla P_0 = \rho_0 \vec{g}.$$

Поле давления, устанавливающееся при конвективном движении, представим в виде суммы

$$P = P_0 + P'.$$

Подставляя в уравнения движения все введенные разложения, получаем

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho') \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] &= -\nabla P_0 - \nabla P' + \eta \Delta \vec{v} + \rho_0 \vec{g} + \rho' \vec{g}, \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{div} \rho' \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Теперь нужно вычесть из первого уравнения уравнение гидростатики и сделать самое важное допущение. Оно состоит в том, что добавкой к плотности  $\rho'$ , возникающей за счет изменения температуры, пренебрегают всюду, за исключением члена, описывающего силу Архимеда. Тогда

$$\rho_0 \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P' + \eta \Delta \vec{v} - \beta T \vec{g}.$$

Систему необходимо дополнить уравнением для температуры. Если пренебречь нагревом жидкости за счет вязкой диссипации, то закон переноса удельной энергии записывается в виде

$$\rho T \left[ \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) S \right] = \kappa \Delta T,$$

где  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности, а энтропия  $S$  связана с температурой и давлением

$$S = S_0 + \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P T' + \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T P'.$$

Используя соотношение

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{\tilde{n}_p}{T_0}$$

и считая третье слагаемое пренебрежимо малым (это логично сделать, так как зависимостью плотности от давления уже пренебрегли), приходим к соотношению

$$S = S_0 + \frac{c_p}{T_0} T'.$$

Подставляя в уравнение для энтропии и ограничиваясь членами, линейными по  $T'$ , получаем

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)T' = \frac{\kappa}{\rho c_p} \Delta T'.$$

Далее, откажемся от написания штрихов (не забывая при этом, что температура отсчитывается от среднего значения, а давление - от гидростатического давления) и запишем результат - систему уравнений для термогравитационной конвекции несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \nu \Delta \bar{v} + g\beta T \bar{e}_z, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)T &= \chi \Delta T, \\ \operatorname{div} \bar{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Мы учли, что  $\bar{g} = -g\bar{e}_z$  и ввели коэффициент температуропроводности  $\chi = \kappa / \rho c_p$ . Систему необходимо дополнить граничными условиями. Для скорости можно принять, например, условия прилипания ( $\bar{v}|_{\bar{A}} = 0$ ), а для температуры - либо задать ее распределение на границе ( $T|_{\bar{A}} = f_1(\bar{A})$ ), либо теплопоток через границу

$$\left.\frac{\partial T}{\partial n}\right|_{\bar{A}} = f_2(\bar{A}).$$

Обсудим возможные способы представления уравнений свободной конвекции в безразмерной форме. Особенностью конвективных задач является отсутствие заданной характерной скорости - скорость есть результат приложенной (заданной) разности температуры. Возможный набор единиц измерения есть: расстояния - характерный размер  $L$ , температуры - характерная разность температур  $\theta$ , скорости - величина  $\nu/L$ , времени -  $L^2/\nu$  и давления -  $\rho_0 \nu^2/L^2$ . Переходя к безразмерным величинам, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla P + \Delta \vec{v} + GT \vec{e}_z, \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T &= \frac{1}{\sigma} \Delta T, \\
\operatorname{div} \vec{v} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.26}$$

В уравнения входят два безразмерных комплекса: число Грассхофа

$$G = \frac{g\beta\vartheta L^3}{\nu^2}$$

и число Прандтля

$$\sigma = \frac{\nu}{\chi}.$$

Число Грассхофа характеризует отношение архимедовых сил к вязким и свидетельствует о сильной зависимости конвективных механизмов от размера (в число Грассхофа размер входит в кубе). В отличие от числа Грассхофа, число Прандтля есть физический параметр жидкости, не зависящий от конкретной задачи, и характеризующий отношение коэффициентов кинематической вязкости и теплопроводности. Приведем несколько типичных примеров значений числа Прандтля. Для газов число Прандтля порядка единицы, у воды  $\sigma \approx 7$ , у ртути  $\sigma \approx 10^{-2}$ , у глицерина -  $\sigma \approx 10^3$ . В жидкостях с малым числом Прандтля теплопередача эффективней конвекции и наоборот, при высоких Прандтлях температура «вморожена» в жидкость и перенос тепла за счет конвекции становится более эффективным, чем теплопередача.

Наряду с двумя введенными безразмерными параметрами, в конвективных задачах часто используется число Релея, являющееся произведением чисел Прандтля и Грассхофа

$$Ra = \sigma G = \frac{g\beta\vartheta L^3}{\nu\chi}.$$

Если за единицу скорости взять величину  $\chi/L$ , оставив все остальные единицы измерения прежними, то мы придем к системе уравнений, содержащей число Релея

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla P + \Delta \vec{v} + RaT \vec{e}_z, \\
\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T &= \Delta T, \\
\operatorname{div} \vec{v} &= 0.
\end{aligned}
\tag{1.27}$$

За единицу скорости можно выбрать и скорость, приобретаемую жидкой частицей, перегретой на величину  $\vartheta$  относительно окружающей ее жидкости и разгоняющейся на расстоянии  $L$ . Из условия  $\rho V^2 \sim \rho' g L$  получаем  $V \sim \sqrt{g\beta\vartheta L}$ . Принимая за единицу времени величину  $L/V$ , получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\nabla P + \frac{1}{R} \Delta \vec{v} + T \vec{e}_z, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T &= \frac{1}{\sigma R} \Delta T, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0.\end{aligned}\tag{1.28}$$

В уравнениях появилось число Рейнольдса, что обусловлено введением характерной скорости. Используя выражение для введенной единицы скорости, просто получить связь появившегося числа Рейнольдса с числом Грасхофа

$$R = \frac{VL}{\nu} = \frac{\sqrt{g\beta\vartheta L} \cdot L}{\nu} = \sqrt{G}.$$

## 1.4 Конвективная устойчивость

Рассмотрим вопрос о том, может ли жидкость оставаться неподвижной при наличии неоднородного распределения температуры. Чтобы убедиться, что равновесие неравномерно нагретой жидкости возможно, достаточно вспомнить школьный опыт по кипячению воды в наклоненной пробирке, на дне которой находится лед, а нагревается только верхняя часть.

Найдем необходимое условие механического равновесия жидкости (при наличии неоднородности температуры). Механическое равновесие подразумевает отсутствие скоростей и стационарность:

$$\vec{v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

С учетом этих условий от уравнений Буссинеска остается

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\rho_0} \nabla P + g\beta T \vec{e} &= 0 \\ \Delta T &= 0.\end{aligned}$$

На первое уравнение подействуем оператором  $\text{rot}$ . Так как

$$\begin{aligned}\text{rot } \nabla &= 0 \\ \text{rot}(T\vec{e}) &= T \text{rot } \vec{e} + \nabla T \times \vec{e} = 0,\end{aligned}$$

а  $\text{rot } \vec{e} = 0$ , то условие равновесия жидкости сводится к требованию

$$\nabla T \times \vec{e} = 0,$$

то есть градиент параллелен вертикальной оси и температура может меняться только по вертикали:  $T = T(z)$ . Это означает, что любой горизонтальный градиент температуры приводит к возникновению конвективного движения.

Из второго уравнения

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

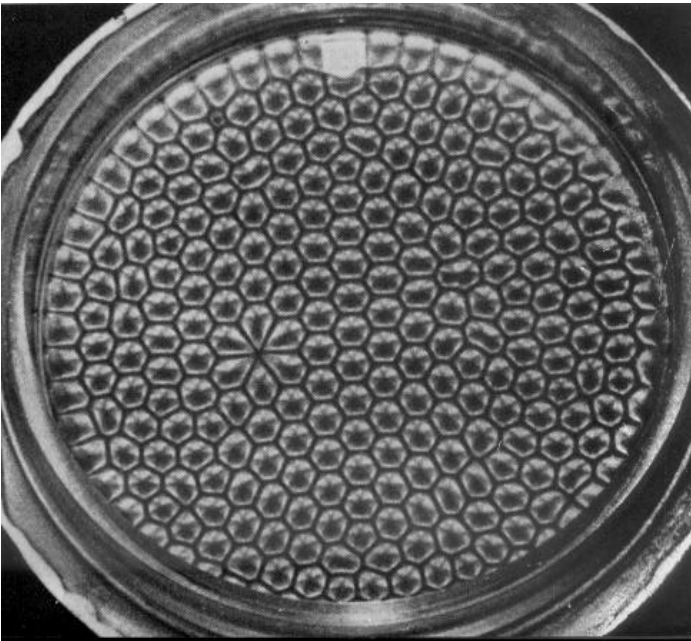


Рис. 1.10.

следует, что температура может быть только линейной функцией высоты:

$$T = Az + B.$$

Мы не получили никакой информации даже относительно знака градиента температуры. Опыт подсказывает, что устойчивым может быть нагрев сверху. Более точный ответ состоит в том, что неустойчивость наступает при подогреве снизу после превышения некоторого (совсем небольшого) критического градиента температуры. Например, в горизонтальном слое с твердыми границами критическое

число Релея, при котором возникает конвекция, равно 1708. Оценим соответствующую критическую разность температуры, имея в виду для определенности слой воды толщиной  $h$ :

$$\Delta T = R^* \frac{\nu \chi}{g \beta h^3} \approx \frac{1708 \cdot 10^{-6} \cdot 1.4 \cdot 10^{-7}}{10 \cdot 2 \cdot 10^{-4} h^3} \approx \frac{10^{-7}}{h^3} \frac{\alpha \delta \delta \delta}{i}.$$



Таким образом, в слое воды глубиной 1 метр при подогреве снизу неустойчивость возникает уже при вертикальной разности температуры величиной всего  $10^{-7}$  градуса, в слое толщиной 1 сантиметр критическая разность температуры равна 0.1 градуса, а слой воды толщиной один миллиметр практически абсолютно устойчив.

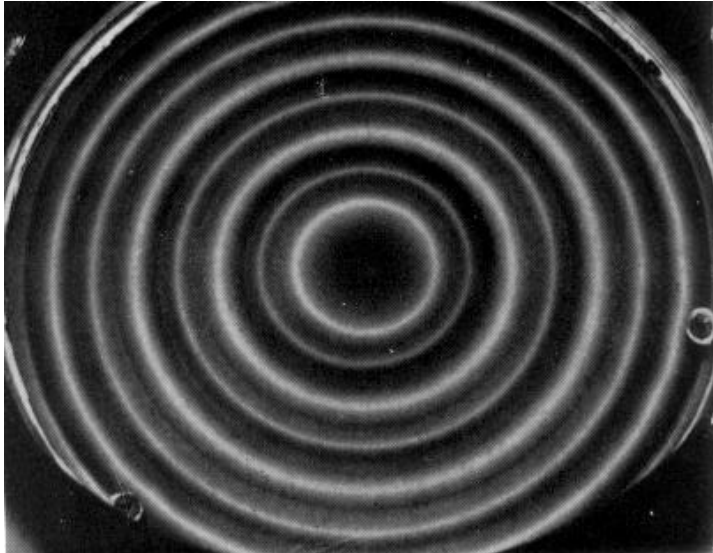


Рис. 1.11.

Задача об устойчивости горизонтального слоя жидкости при наличии вертикального градиента температуры (задача Релея-Бенара) является классической задачей о конвективной устойчивости.

Именно в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободной верхней границей Бенар в 1900 году обнаружил возникновение после превышения критического градиента температуры гексагональных структур, получивших название ячеек Бенара (рис.1.10). Фотография, взятая из работы [Koschmieder E.L. Adv.Chem.Phys., 1974, V.26. P.177-212.], иллюстрирует высокую чувствительность гексагональной структуры к возмущениям - слабая деформация поверхности медной пластины, образующей дно сосуда, приводит к локальному нарушению вида ячеек. Течение в слое силиконового масла визуализируется с помощью алюминиевой пудры.

Отметим, что гексагональные структуры возникают в слое только при наличии свободной поверхности и направление циркуляции в жидкостях и газах при этом противоположно. В жидкости горячий поток поднимается в центре ячейки, а в газах наоборот - в центре ячейки холодный поток жидкости направлен вниз. Отметим, что возникновение гексагональных структур связано с действием поверхностного натяжения. При твердых горизонтальных границах возникают конвективные валы. Этот вид конвективных течений иллюстрирует рис.1.11, где показана валиковая конвекция в слое силиконового масла в круглом сосуде, закрытом сверху стеклом. Форма сосуда навязывает валам осевую симметрию.

Задача Релея. Теоретически задачу о конвективной устойчивости жидкости впервые решил Релей в 1916 году. Он рассмотрел горизонтальный слой жидкости толщиной  $h$  со свободными, но не деформируемыми границами (такие не совсем реальные граничные условия дают самую про-

...

стую постановку), на которых поддерживается температура  $T_1$  и  $T_2$ , соответственно. Уравнения Буссинеска записываются в безразмерной форме (на этот раз единицы измерений выбраны следующим образом: единица длины -  $h$ , температуры -  $(T_1 - T_2)$ , времени -  $h^2/\nu$ , скорости -  $\chi/h$ ):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\sigma} \nabla P + \Delta \vec{v} + RT \vec{e}_z, \\ \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) T &= \Delta T, \\ \operatorname{div} \vec{v} &= 0.\end{aligned}$$

Решается двумерная задача в плоскости  $(x, z)$ , то есть имеются в виду конвективные валы, направленные вдоль оси  $y$ . Граничные условия:

$$\begin{aligned}z = 0: \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} &= 0, \quad v_z = 0, \quad T = 1. \\ z = 1: \quad \frac{\partial v_{x,y}}{\partial z} &= 0, \quad v_z = 0, \quad T = 0.\end{aligned}$$

Температура задается в виде  $T = \vartheta - z$ , так что величина  $\vartheta$  описывает отклонение температуры от равновесного (линейного) распределения. Для поля скорости вводится функция тока

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Рассмотрение ведется в рамках линейной теории устойчивости, то есть из уравнений выбрасываются все члены, квадратичные по скорости и возмущениям равновесного профиля температуры. В результате получаются линейные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi &= \Delta \Delta \psi + R \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \\ \sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \Delta \vartheta + \frac{\partial \psi}{\partial x}.\end{aligned}$$

Последнее слагаемое во втором уравнении - это остаток от нелинейного слагаемого, так как

$$(\vec{v} \nabla) T = (\vec{v} \nabla) \vartheta - v_z.$$

Граничные условия на верхней и нижней границах имеют одинаковый вид:

$$\psi = \Delta\psi = \vartheta = 0.$$

Следующий шаг состоит в использовании нормальных возмущений, которые задаются в форме периодических возмущений с экспоненциальной зависимостью амплитуды от времени:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \sin(\pi a x) \\ \vartheta &= \vartheta_0 e^{-\lambda t} \sin(\pi n z) \cos(\pi a x).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= -\pi^2(n^2 + a^2)\psi \\ \Delta\Delta\psi &= \pi^4(n^4 + 2a^2n^2 + a^4)\psi,\end{aligned}$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned}\lambda\pi^2(n^2 + a^2)\psi_0 &= \pi^4(n^4 + 2a^2n^2 + a^4)\psi_0 - Ra\pi\vartheta_0 \\ -\lambda\sigma\vartheta_0 &= -\pi^2(n^2 + a^2)\vartheta_0 + \pi a\psi_0\end{aligned}$$

представляющие собой систему линейных, однородных уравнений для амплитуд  $\psi_0$  и  $\vartheta_0$ :

$$\begin{aligned}\pi^2(a^2 + n^2)[\lambda - \pi^2(n^2 + a^2)]\psi_0 + Ra\pi\vartheta_0 &= 0 \\ \pi a\psi_0 + [\lambda\sigma - \pi^2(n^2 + a^2)]\vartheta_0 &= 0.\end{aligned}$$

Система имеет решение, если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} \pi(a^2 + n^2)[\lambda - \pi^2(n^2 + a^2)] & Ra \\ \pi a & \lambda\sigma - \pi^2(n^2 + a^2) \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель, получаем уравнение

$$\pi(a^2 + n^2)[\lambda^2\sigma - \lambda\gamma - \sigma\lambda\gamma + \pi^4(n^2 + a^2)^2] - \pi Ra^2 = 0,$$

решение которого дает значения для декремента  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\pi^2(1+\sigma)(n^2 + a^2)}{2\sigma} \pm \sqrt{\frac{\pi^4(n^2 + a^2)^2(1-\sigma)^2}{4\sigma^2} + \frac{Ra^2}{\sigma(a^2 + n^2)}}. \quad (1.29)$$

По виду решения (1.29) можно сделать ряд полезных выводов. Во-первых, видно, что при положительных значениях числа Релея (а при принятых обозначениях положительным числам Релея соответствует нагрев слоя снизу) подкоренное выражение всегда положительно. Это означает, что оба корня уравнения являются вещественными величинами и, следовательно, возмущения эволюционируют монотонным образом. При этом один корень всегда положителен, а второй при некотором значении  $R = R_c$  меняет знак.

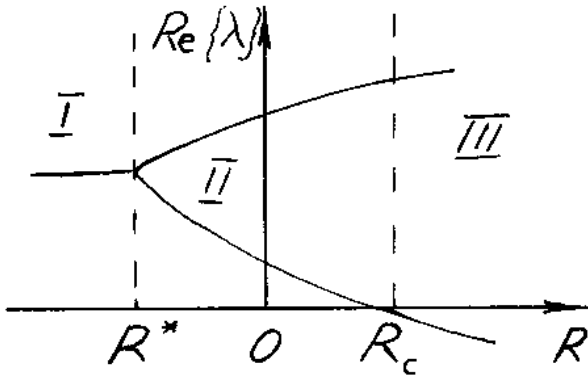


Рис. 1.12.

Во-вторых, при отрицательных числах Релея (подогрев сверху) вещественная часть обоих корней всегда положительна. Следовательно, все возмущения при подогреве сверху затухают. В то же время с ростом величины подогрева возникает ситуация, когда выражение под корнем становится отрицательным, то есть появляется два комплексно-сопряженных корня, описывающих затухающие, но колебательные режимы. Это происходит при

$$R^* = \frac{\pi^4 (n^2 + a^2)^3 (1 - \sigma)^2}{4\sigma a^2}.$$

На рис.1.12 показан график зависимости вещественной части декремента затухания от числа Релея. На графике отмечены три области: I - область затухающих колебательных возмущений, II - область монотонно затухающих возмущений и III - область монотонно нарастающих возмущений.

Найдем критическое значение числа Релея, при достижении которого начинается нарастание возмущений. Из условия  $\lambda = 0$  получаем

$$R_c = \frac{\pi^4 (a^2 + n^2)^3}{a^2}.$$

Так как требуется найти самые опасные возмущения, то нужно определить соответствующие значения  $a$  и  $n$ . Дифференцирование по  $a$  дает

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{2\pi^4}{a^3} (a^2 + n^2)^2 (2a^2 - n^2) = 0$$

и

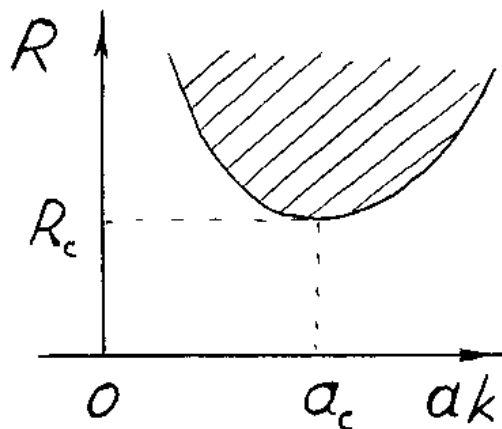


Рис. 1.13.

$$a_c = \frac{n}{\sqrt{2}}, \quad R_c = \frac{27\pi^4 n^4}{4}.$$

Самые малые критические значения появляются при  $n=1$ , что соответствует одному слою конвективных валов. Следовательно,

$$a_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_c = \frac{27\pi^4}{4} = 657,5.$$

Вид нейтральной кривой показан на рис.1.13.

## 1.5 Маломодовая модель конвекции (система Лоренца)

В заключение вводной части курса остановимся на выводе простой динамической системы, описывающей конвективные течения в той же самой задаче Релея о конвекции в подогреваемом снизу горизонтальном слое несжимаемой жидкости. Эта система стала одной из наиболее известных динамических систем, иллюстрирующих переход к хаосу и возникновение странных аттракторов (см. следующую главу). На данном этапе нас интересует сам процесс получения конечномерных проекций уравнений движения жидкости и переход к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Учитывая общепринятый вид системы Лоренца, мы сохраним единицы размерности и обозначения его работы (Lorenz E., Deterministic Non-periodic Flow, Journal of Atmospheric Sciences, 1963, V.20, P.130-141.)

Как и в описанной выше задаче Релея рассматриваются только плоские движения жидкости (конвективные валы). Вектор скорости имеет две компоненты  $\vec{v} = (v_x, 0, v_z)$  и уравнения Буссинеска, записанные покомпонентно, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta v_z + g\beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Далее снова вводится функция тока (мы повторяем вывод уравнений, так как теперь в них сохраняются нелинейные слагаемые)

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta \frac{\partial \psi}{\partial z} + g\beta T \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T \end{aligned}$$

и после обычной процедуры дифференцирования первого и второго уравнений соответственно по  $z$  и по  $x$  и вычитания первого из второго, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} &= \nu \Delta \Delta \psi + g\beta \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \{\psi, T\} &= \chi \Delta T, \end{aligned} \quad (1.31)$$

где для упрощения записи использованы скобки Пуассона

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Учитывая линейную зависимость равновесной температуры по высоте, представим, как и ранее, температуру в виде суммы

$$T = \theta - \frac{\Delta T z}{h},$$

где  $\theta$  - есть отклонение температуры от линейного профиля. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} &= \nu \Delta \Delta \psi + g\beta \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \{\psi, \theta\} - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \chi \Delta \theta. \end{aligned} \quad (1.32)$$

На границах:

$$\psi = \Delta \psi = \theta = 0.$$

Дальнейший путь состоит в том, что функция тока и температура раскладываются в двойные ряды Фурье с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= \sum \psi_{mm}(t) \sin\left(\frac{\pi mx}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{h}\right), \\ \theta(x, z, t) &= \sum \theta_{mm}(t) \cos\left(\frac{\pi mx}{h}\right) \sin\left(\frac{\pi nz}{h}\right).\end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях от  $x$  и  $z$ , получают систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $\psi_{mm}(t)$  и  $\theta_{mm}(t)$ . Отличительной особенностью модели Лоренца является то, что в разложениях оставлено минимальное число членов, сохраняющих нелинейность системы, а именно, один член из ряда для функции тока и два - для температуры. Этот выбор был обусловлен результатами численных исследований конечномерных систем, проведенных Сольцменом (Saltzman B. Finite amplitude free convection as an initial value problem, Journal of Atmospheric Sciences, 1962, V.19, P.329-341.), в которых было показано, что при некоторых значениях параметров системы действительно возникают режимы, при которых все остальные переменные стремятся к нулю, а поведение трех оставшихся характеризуется нерегулярными непериодическими колебаниями.

Мы, следуя Лоренцу, сразу оставим в разложениях только эти три члена, обозначив амплитуды соответствующих мод как  $X, Y \text{ и } Z$ . Отметим, что при этом используется не совсем обычный способ обезразмеривания, в том смысле, что в единицы измерений входят критические параметры. За единицы измерения приняты величины: длины -  $h$ , времени -  $\tau = h^2 / (\pi^2 (1 + a^2) \chi)$ , функции тока -  $h^2 / \tau$ , температуры -  $\Delta T$ . Вводится обозначение  $b = 4 / (1 + a^2)$  и нормированное число Релея

$$r = \frac{R}{R_c} = \frac{g\beta \Delta T h^3 a^2}{\chi \nu \pi^4 (1 + a^2)^3}.$$

Безразмерная система уравнений примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \{\psi, \Delta \psi\} = \frac{\sigma b}{4\pi^2} \Delta \Delta \psi + \frac{4\sigma r}{ba^2} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \{\psi, \theta\} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{b}{4\pi^2} \Delta \theta. \quad (1.34)$$

В эти уравнения подставляются разложения для функции тока и для температуры в виде

$$\psi = X(t) \frac{\sqrt{2}}{\pi^2 a} \sin(\pi a x) \sin(\pi z)$$

$$\theta = \frac{1}{\pi r} \left[ Y(t) \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Z(t) \sin(2\pi z) \right]$$

В уравнении (1.33) скобки Пуассона равны нулю и простые преобразования приводят к уравнению (производные по времени обозначаем точками)

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

Уравнение (1.34) дает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi r} \left[ \dot{Y} \sqrt{2} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - \dot{Z} \sin(2\pi z) \right] + \\ & X \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \left[ Y \sqrt{2} \cos(\pi a x) \cos(\pi z) - 2Z \cos(2\pi z) \right] + \\ & X \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \sin(\pi a x) \cos(\pi z) Y \sqrt{2} \sin(\pi a x) \sin(\pi z) = \\ & X \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - Y \frac{\sqrt{2}}{\pi r} \cos(\pi a x) \sin(\pi z) + \frac{b}{\pi r} Z \sin(2\pi z). \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма слагаемых, содержащих произведение  $XY$ , дает  $[XY(\pi r)^{-1} \sin(2\pi z)]$  можно упростить уравнение

$$\begin{aligned} & [\dot{Y} - rX + Y] \cos(\pi a x) \sin(\pi z) - 2XZ \cos(\pi a x) \sin(\pi z) \cos(2\pi z) = \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} [\dot{Z} - XY + bZ] \sin(2\pi z). \end{aligned}$$

Это уравнение разделяется на два путем последовательного умножения на  $\sin(\pi z)$  и на  $\sin(2\pi z)$  и интегрирования по координате  $z$ . Таким образом, система уравнений для амплитуд трех выбранных мод выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} &= XY - bZ \end{aligned} \tag{1.35}$$

Напомним, что система (1.35) имеет отношение к реальным конвективным движениям только при небольших надкритичностях (относительное число Релея не намного превосходит единицу). Несмотря на это, поведение этой системы оказалось интересным само по себе и многочисленные численные исследования ее свойств проводились в очень широком диапазоне параметра  $r$ . В вычислениях обычно используют число Прандтля  $\sigma = 10$ , а па-



раметр  $b = 8/3$ , что соответствует результату Релея для критического значения  $a = 1/\sqrt{2}$ .

Рекомендуемая литература к первой главе:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.736с.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392с.
4. Валандер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. 296с.

## 2 ХАОС В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Турбулентные течения представляют собой системы, характеризующиеся наличием хаотически распределенных и хаотически осцилирующих структур самого различного масштаба. Турбулентность - это воплощение хаоса, а хаос долгое время ассоциировался с системами, имеющими огромное число степеней свободы, и развитая турбулентность считалась лишеной какого-либо порядка. Однако, начиная с конца 60-х годов нашего века наметился значительный прогресс в понимании природы турбулентности, связанный с осознанием природы и структуры хаоса.

Во-первых, была установлена возможность хаотического поведения в нелинейных системах с совсем небольшим числом степеней свободы. Интересно, что впервые хаотическое поведение в простых гамильтоновых системах обнаружил А. Пуанкаре около ста лет назад, но только после работы Э. Лоренца (1963г.), в которой исследовалось хаотическое поведение диссипативной системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1.35), было оценено значение этого факта и началось активное исследование хаотического поведения динамических систем. Правда, произошло это тоже не сразу, а только после ключевой работы Д. Рюэля и Ф. Таккенса 1971г., в которой было сформулировано понятие странного аттрактора и указана его роль в формировании нерегулярного поведения системы.

Во-вторых, было понято, что даже в самом развитом турбулентном потоке существуют элементы порядка, а число реально возбужденных степеней свободы значительно меньше ожидаемого. В 70-80-х годах появляются многочисленные работы о когерентных структурах в турбулентных потоках и делаются первые попытки описания турбулентности на языке фракталов.

Именно в это время сформировались такие науки, как теория катастроф и синергетика, появились первые книги о «детерминированном хаосе» и «порядке в хаосе». Важно подчеркнуть, что обычно рассматриваемые в этих книгах проблемы динамических систем невысокого порядка не имеют прямого отношения к развитой турбулентности. В них речь идет о хаотическом во времени поведении небольшого числа заданных в пространстве мод (такие течения реально существуют при небольших надкритичностях, то есть вблизи порога неустойчивости), в то время, как «истинная» турбулентность хаотична и в пространстве и во времени. Тем не менее, рассматриваемые в качественной теории динамических систем вопросы чрезвычайно полезны как для понимания путей развития турбулентных течений

(сценариев перехода к хаосу), так и для отработки методов описания хаотических (в том числе и турбулентных) систем.

Необходимо остановиться на самом понятии детерминированный хаос. Под ним понимают нерегулярное поведение нелинейных систем, эволюция которых однозначно описывается динамическими уравнениями при заданных начальных условиях. При этом нелинейность является необходимым, но не достаточным условием возникновения хаотического поведения, а его возникновение связано не с наличием источников шума или бесконечного числа степеней свободы, а со свойством нелинейных систем экспоненциально быстро разводить решения в ограниченной области фазового пространства.

В данной главе мы остановимся на базовых понятиях теории динамических систем, рассмотрим основные виды бифуркаций и основные сценарии перехода от упорядоченного движения к хаосу. Мы подробно разберем свойства системы Лоренца, не только сыгравшей важнейшую роль в становлении науки о хаосе, но и имеющей самое прямое отношение к теме нашего курса. Далее мы приведем пример еще одной динамической системы, имеющей отношение к гидродинамическим системам - это простейшая модель земного динамо Рикитаке. В завершение будут приведены некоторые результаты лабораторного исследования стохастизации конвективного движения в замкнутой полости.

## 2.1 Консервативные и диссипативные системы

Любые движения можно разделить на монотонные и колебательные, а колебательные в свою очередь, на регулярные (периодические) и нерегулярные. Среди периодических колебаний наиболее изучены гармонические колебания. Это вполне естественно, так как гармонические колебания чрезвычайно широко распространены в самых различных системах, а также потому, что любой колебательный процесс с помощью преобразования Фурье может быть представлен как сумма гармонических колебаний. Не удивительно, что знакомство с динамическими системами традиционно начинают с рассмотрения простого осциллятора.

Рассмотрим хорошо известный со школьной скамьи математический маятник - точечное тело массой  $m$ , подвешенное на стержне длиной  $l$  и находящееся в поле силы тяжести, характеризуемой ускорением свободного падения  $g$  (Рис.2.1). Маятник имеет одну степень свободы, описываемую углом отклонения от

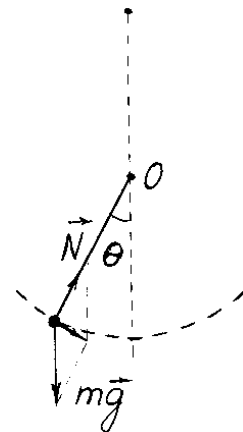


Рис. 2.1.

вертикали  $\theta$ . Основной закон механики приводит к уравнению, которое в цилиндрических координатах имеет вид

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0. \quad (2.1)$$

Для малых угловых отклонений, когда  $\sin\theta \approx \theta$ , уравнение (2.1) становится линейным уравнением

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0, \quad (2.2)$$

решением которого являются гармонические колебания  $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$  с круговой частотой  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

### 2.1.1 Фазовое пространство

Состояние маятника в любой момент времени полностью задается двумя величинами: положением  $\theta(t)$  и угловой скоростью  $\dot{\theta}(t)$ . Если мы введем систему координат, осями которой будут служить эти две величины, то точка на плоскости  $(\theta, \dot{\theta})$  будет полностью характеризовать состояние системы, а любому решению будет соответствовать та, или иная линия (траектория).

Фазовое пространство определим как пространство, в котором осями координат служат переменные, описывающие состояние системы, в случае осциллятора - положение и скорость. Фазовой траекторией называется кривая в фазовом пространстве, описывающая эволюцию системы. Совокуп-

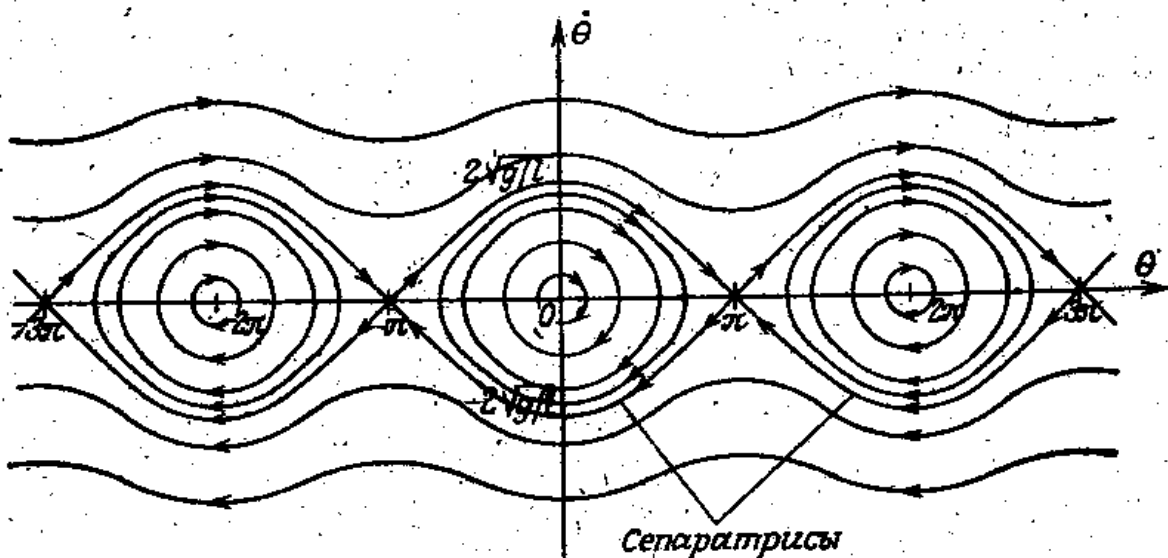


Рис. 2.2.

ность фазовых траекторий, описывающих эволюцию системы при различных начальных условиях, образует фазовый портрет системы.

На рисунке 2.2 приведен фазовый портрет маятника. Картина периодична по оси  $\theta$  с периодом  $2\pi$ . В области применимости уравнения (2.2) фазовые траектории представляют собой окружности с центрами в точках  $\dot{\theta} = 0, \theta = \pm 2\pi n$ ,  $n$ -целое число. Эти кривые соответствуют гармоническим колебаниям, частота которых не зависит от амплитуды. С ростом амплитуды колебаний траектории принимают эллиптическую форму и период колебаний растет. Если энергия колебаний превышает величину  $2g/l$ , то колебания переходят во вращения вокруг оси. Траектории, точно соответствующие этому значению энергии, проходят через верхнее, неустойчивое положение равновесия и период колебаний стремится к бесконечности. Эта траектория разделяет области фазового пространства с различным характером поведения (колебания и вращения) и является сепаратрисой. Стрелки на рисунке указывают направление движения.

### 2.1.2 Консервативные системы

Маятник, описываемый уравнением (2.1) сохраняет энергию. Действительно,

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos\theta) = ml^2 \left[ \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{l}(1 - \cos\theta) \right]$$

и

$$\frac{dE}{dt} = ml^2 \left[ \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta \right] \dot{\theta} = 0. \quad (2.3)$$

Это означает, что линии на рисунке 2.2 можно интерпретировать как линии равной энергии. Энергия с точностью до множителя совпадает с функцией Гамильтона, а уравнение (2.1) приводится к системе уравнений первого порядка

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}.$$

Здесь  $H(p, \theta) = \frac{p^2}{2l} + g(1 - \cos\theta)$ , и  $p = l\dot{\theta}$ .

Таким образом, рассмотренный маятник относится к гамильтоновым системам, которые, как известно, консервативны.

Из консервативности (сохранения энергии) следует одно очень важное свойство - сохранение площадей (в общем случае - объема) в фазовом

пространстве. Элемент объема в фазовом пространстве можно рассматривать как множество начальных условий. В процессе эволюции это множество преобразуется в другой элемент фазового пространства (каждая точка следует своей фазовой траектории), объем которого должен оставаться постоянным.

Следует подчеркнуть, что сохранение объема не подразумевает при этом сохранения формы, так как сохранение объема может достигаться двумя различными способами. В первом случае элемент фазового объема переносится вдоль траектории практически без деформации. Во втором случае происходит экспоненциальное удлинение объема в некотором направлении с одновременным сжатием в перпендикулярном направлении (также экспоненциальным). Хотя фазовый объем сохраняется в обоих случаях, поведение системы отличается принципиально. В первом случае траектории, близкие в начальный момент времени, остаются близкими - траектории (а следовательно, и решение) устойчивы. Во втором случае малое начальное возмущение приводит к быстрому расхождению траекторий со временем - они не устойчивы.

Отметим еще одно свойство консервативных систем, состоящее в том, что они инвариантны к обращению времени (замене  $t$  на  $-t$ ). В случае маятника это означает, что если его движения заснять на видеофильм, то фильм можно прокручивать в обоих направлениях и отличить правильное направление от обратного по воспроизводимым движениям маятника будет невозможно.

### 2.1.3 Диссипативные системы

Примером простейшей диссипативной системы может служить тот же простой маятник, но подверженный действию сил трения. Реально силы трения присутствуют всегда (трение на оси, сопротивление воздуха и т.д.) и ни один свободный осцилятор не совершает колебания неограниченно долго. Для учета действия сил сопротивления нужно добавить в уравнение

(2.1.) слагаемое, например, пропорциональное скорости движения маятника

$$\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  есть коэффициент трения.

Повторяя вычисления для скорости изменения энергии, вместо (2.3) получим теперь

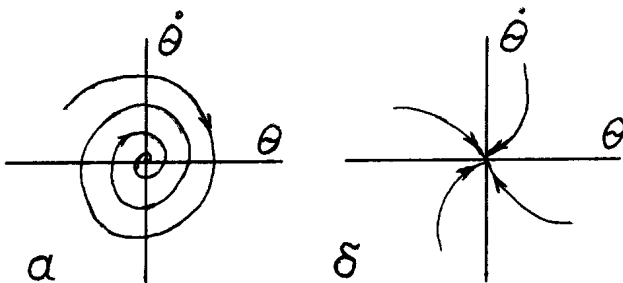


Рис. 2.3.

$$\frac{dE}{dt} = -\mu ml^2 \dot{\theta}^2. \quad (2.5)$$

Таким образом, при любом положительном значении коэффициента трения энергия убывает со временем, стремясь в конечном итоге к нулю (отрицательной энергия стать не может). Это означает, что семейство траекторий, представлявшее собой в отсутствие трения множество концентрических окружностей, превращается теперь во множество траекторий, сходящихся к началу координат. На рисунке 2.3 показаны фазовые портреты маятника с трением для малого (а) и большого (б) трения. В первом случае характерное время затухания значительно превышает период колебаний и траектории представляют собой спирали с малым шагом. Соответствующий фазовый портрет называется фокусом. Во втором случае затухание происходит за время, меньшее периода. Колебания становятся аperiodическими, а портрет называется узлом. В обоих случаях все фазовые траектории заканчиваются в одной точке, которая называется притягивающей точкой или аттрактором.

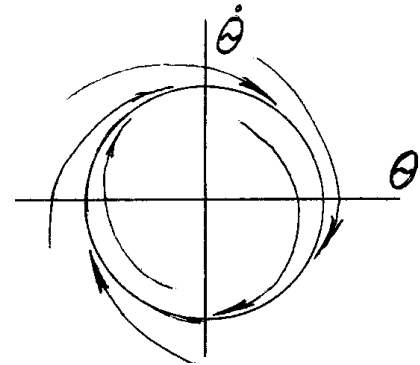


Рис. 2.4.

Наличие аттрактора является важнейшим свойством диссипативных систем. Аттрактор является точкой только в простейших случаях. В общем случае аттрактор - это притягивающее множество (линия, поверхность и т.д.). Представим, что в рассматриваемом нами осциляторе добавлена вынуждающая сила (для конкретности представим себе гирию в часах-ходиках). Теперь, независимо от начальных условий фазовые траектории сходятся к окружности, радиус которой определяется действующей силой

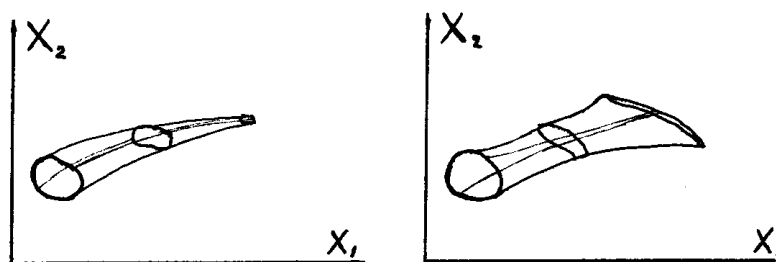


Рис. 2.5.

(рис.2.4). Эта круговая траектория и является аттрактором (предельным циклом). Важным является тот факт, что в диссипативной системе пропала зависимость решения от начальных условий (на достаточно больших временах, когда система выходит на аттрактор).

Рассмотренный пример иллюстрирует еще одно важнейшее свойство диссипативных систем - сжатие площадей (объема) в фазовом пространстве. Объем любого множества начальных условий уменьшается в среднем во времени. Однако, как и в консервативных системах, эволюция множества может происходить различным образом. Иногда (как в простом маятнике с трением) это множество равномерно стягивается в точку (или стремится к предельному циклу) и все траектории сближаются со временем. Но не всегда уменьшение объема подразумевает неизбежное сокращение длин. Растяжение объема в одном направлении может компенсироваться более эффективным сжатием в другом направлении. Эти два сценария сжатия фазового объема показаны на рисунке 2.5.

Последнее принципиальное отличие диссипативных систем от консервативных связано с тем, что они не инвариантны к обращению времени. Если фильм о затухающем маятнике просматривать в обратном направлении, то маятник станет раскачивающимся.

#### 2.1.4 Пример немеханической системы

Приведем простой пример диссипативной системы из живого мира. Это модель системы жертва - хищник. Система бесспорно диссипативна, так как в отсутствие пищи любая биологическая популяция вымирает.

Пусть в изолированном лесу обитают только зайцы и волки, за популяциями которых мы и собираемся следить ( $N$  - количество волков,  $n$  - количество зайцев). Фазовое пространство есть в этом случае один квадрант на плоскости  $(n, N)$ , так как отрицательные значения для численности животных не возможны. Постараемся нарисовать фазовый портрет системы, не выписывая уравнений.

Какие параметры определяют возможные сценарии развития жизни в лесу? Это рождаемость обоих видов, естественная смертность, аппетит волков. Очевидно, что у каждого вида есть наименьшее критическое число (соответственно,  $n_c$  и  $N_c$ ), необходимое для того, чтобы вид мог воспроизводиться. Отложим на осях эти критические значения и подумаем, как может развиваться система если начальные условия задают старт фазовой траектории вблизи осей координат. Ясно, что решающим является число зайцев. Если количество зайцев не достаточно для поддержания вида, то вымрут зайцы, а следом с неизбежностью вымрут и волки. Если мало волков ( $N < N_c$ ), а зайцев достаточно, то после вымирания волков численность популяции зайцев (в упрощенной модели) будет зависеть только от наличия травы в нашем лесу (обозначим это число как  $n_m$ ). Таким образом, в системе выявились две притягивающие точки, каждая из которых имеет свою область притяжения.



Если число зайцев и волков достаточно, то наиболее вероятное развитие событий - это возникновение колебаний: размножились волки - уменьшается число зайцев, стало мало зайцев - уменьшается численность волков, стало меньше волков - снова размножаются зайцы и т.д. Такой сценарий немедленно следует и из простейшей модельной системы

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \alpha n - \beta n N, \\ \dot{N} &= -\gamma N + \delta n N, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\alpha$  - рождаемость зайцев,  $\gamma$  - смертность волков (смертностью зайцев от старости пренебрегаем),  $\beta$  и  $\delta$  - коэффициенты, описывающие результат встречи зайцев с волками (как часто такие встречи заканчиваются трагически и сколько волков могут насытиться в результате одной удачной охоты). Система (2.6) имеет стационарное решение:  $n = \alpha / \beta$ ,  $N = \gamma / \delta$ , а линеаризация системы вблизи точки равновесия приводит к уравнению

$$\ddot{n} = -\alpha\gamma n,$$

имеющим своим решением гармонические колебания. Таким образом, если стационарное решение является неустойчивым, то можно ожидать появления в системе предельного цикла. Все сказанное суммирует рисунок 2.6, где приведен качественный вид фазового портрета системы зайцы - волки. Видно, что аттрактор системы включает два узла и предельный цикл, и что каждый из трех элементов аттрактора имеет свою область притяжения. Области притяжения разделены сепаратрисами, обозначенными пунктиром.

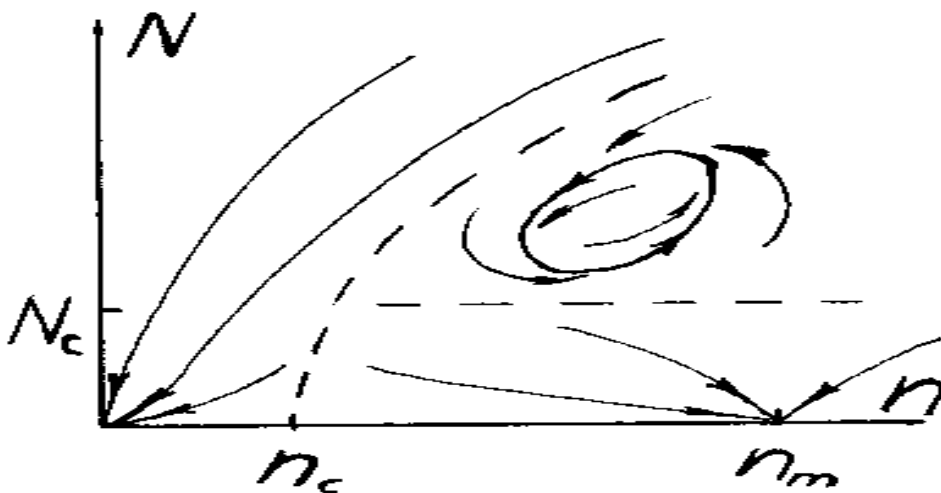


Рис. 2.6.

## 2.2 Бифуркации

### 2.2.1 Что такое бифуркация ?

В рассмотренных нами примерах диссипативных систем с подводом энергии (маятник, энергия которого поддерживается за счет опускающейся гири, животные в лесу, питающиеся в конечном итоге за счет травы) мы обошли молчанием важный вопрос о том, как устойчивое решение (точка в фазовом пространстве) становится неустойчивым и сменяется предельным циклом. Ясно, что поведение системы зависит от некоторых управляющих параметров (масса гири в часах, при недостатке которой маятник остановится, рождаемость зайцев и т.д.) и при изменении этого параметра возможны не только количественные, но и качественные перестройки характера эволюции системы.

Точка в пространстве параметров, при которой происходят качественные изменения характера решений, называется точкой бифуркации, а соответствующее значение параметра называется критическим. Вспомним результаты анализа конвективной устойчивости нагретой жидкости в горизонтальном слое, описанные в первой главе и представим их на плоскости  $(R, A)$ , где  $R$  - число Релея, а  $A$  - амплитуда (скорость вращения) конвективных валов (см. рис.2.7). При  $R < R_c$ , единственным решением является устойчивая неподвижная точка (конвекция отсутствует). В точке  $R = R_c$  рождается дополнительная пара решений (это также устойчивые точки), каждое из которых соответствует вращению валов в ту или иную сторону.

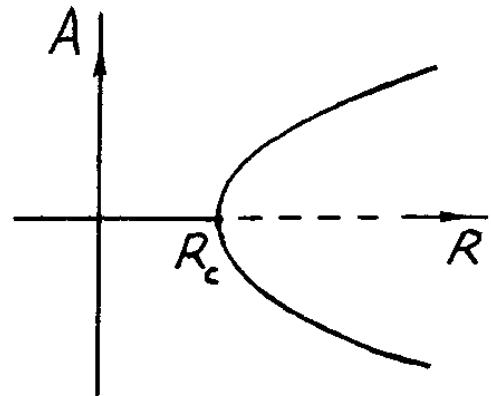


Рис. 2.7.

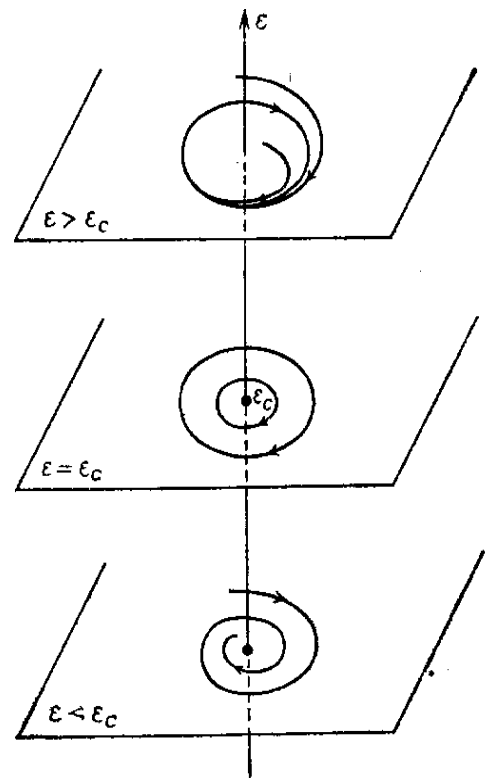


Рис. 2.8.

При этом прежнее решение становится неустойчивым. В этой точке имеет место бифуркация, называемая вилкой (ответвление пары решений в виде притягивающих точек). Таким образом, точкой бифуркации называется точка, в которой происходит ветвление решений.

### 2.2.2 Бифуркация Хопфа

Бифуркацией Хопфа называется процесс рождения предельного цикла из точки. Поведение системы вблизи точки бифуркации иллюстрирует рисунок 2.8. На рисунке схематически изображены фазовые траектории при трех значениях управляющего параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon < \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_c$ ,  $\varepsilon > \varepsilon_c$ .

Отметим два важных свойства бифуркации Хопфа. Во-первых, вблизи точки бифуркации период колебаний не зависит от величины надкритичности  $\varepsilon - \varepsilon_n$ . Во-вторых, амплитуда колебаний (амплитуда предельного цикла) зависит от надкритичности по корневому закону, то есть пропорциональна величине  $\sqrt{|\varepsilon - \varepsilon_c|}$ .

Именно с бифуркацией Хопфа связан первый предложенный сценарий перехода от ламинарного течения к турбулентности (Ландау, 1944г.). Согласно сценарию Ландау переход к турбулентности представляет собой бесконечную цепочку бифуркаций Хопфа, каждая из которых приводит к появлению новой частоты. В такой схеме аттрактор представляет собой  $n$ -мерный тор с  $n$ , стремящимся к бесконечности, и хаос рождается в системе с очень большим числом степеней свободы.

### 2.2.3 Нормальные и обратные бифуркации

Представленная на рис.2.7 бифуркационная диаграмма соответствует нормальной (суперкритической) бифуркации вилки. Это означает, что возникающая в точке бифуркации пара решений ответвляется от начального решения мягко, то есть с нулевой начальной амплитудой, которая монотонно растет по мере роста надкритичности.

Точно также нормальной (суперкритической) называется бифуркация Хопфа, если предельный цикл рождается с нулевой амплитудой и в точке бифур-

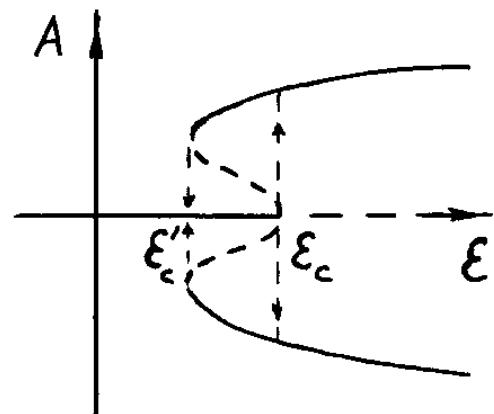


Рис. 2.9.

кации система находится в состоянии нейтральной устойчивости. По мере удаления от точки бифуркации происходит плавное увеличение амплитуды предельного цикла.

Возможна и другая картина, когда в точке бифуркации происходит жесткий переход к циклу конечной амплитуды (или, в случае вилки, две новые точки появляются на конечном расстоянии друг от друга). Это происходит, когда нелинейные члены в уравнениях стремятся усилить возникающую неустойчивость. Проходя точку бифуркации справа налево (рис.2.9) можно видеть, что неустойчивая неподвижная точка превращается в устойчивую неподвижную точку и неустойчивый предельный цикл. Такая бифуркация называется обратной или субкритической.

Важной особенностью обратных бифуркаций является наличие интервала управляющего параметра  $\varepsilon'_n < \varepsilon < \varepsilon_c$ , в котором сосуществуют два устойчивых решения. Какое из этих решений реализуется, зависит от предыстории: при движении слева направо неподвижная точка остается устойчивой до значения  $\varepsilon = \varepsilon_n$ , после чего решение перепрыгивает на одну из двух устойчивых ветвей. При движении справа налево решение следует вдоль этой ветви до точки  $\varepsilon = \varepsilon'_n$ , где скачком переходит в устойчивую неподвижную точку на оси.

Такое явление называется гистерезисом и хорошо известно в самых различных областях физики и механики.

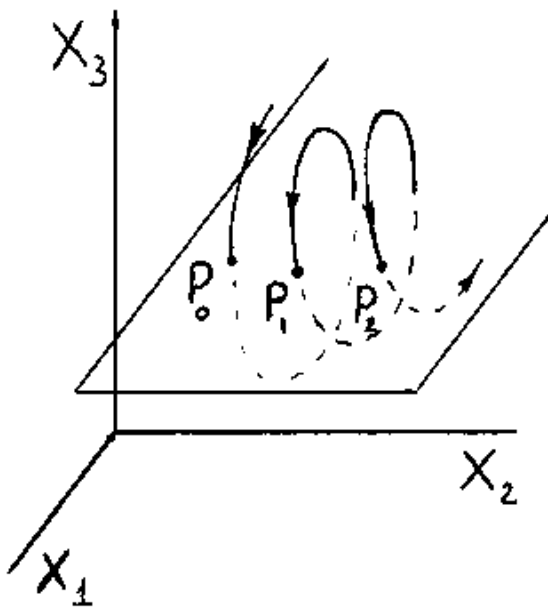


Рис. 2.10.

## 2.3 Как описать переход и хаос ?

### 2.3.1 Сечения Пуанкаре

Идея метода Пуанкаре состоит в снижении объема обрабатываемой информации при изучении поведения фазовых траекторий путем рассмотрения лишь дискретного ряда точек на траектории. Реализуется эта идея путем выбора некоторой (вообще говоря, произвольной) плоскости в фазовом пространстве и наблюдения за точками пересечения этой плоскости фазовыми траекториями. Метод поясняет рисунок 2.10, где для трехмерного фазового пространства показаны

точки пересечения плоскости фазовой траекторией (причем фиксируются только точки, в которых траектории пересекают плоскость в одном направлении, в данном случае, сверху вниз).

Множество точек пересечения  $P_i$  образуют сечение Пуанкаре, а преобразование, связывающее последующую точку с предыдущей

$$P_{i+1} = T(P_i) \quad (2.7)$$

называется отображением Пуанкаре.

При переходе от фазовых траекторий к сечению Пуанкаре происходит снижение размерности исследуемого множества. При этом рассматривается не система дифференциальных уравнений с непрерывным временем, а отображение (2.7) с дискретным временем и дифференциальные уравнения заменяются разностными. В то же время, сечение Пуанкаре сохраняет топологические свойства породившего его потока. Так для консервативной системы сечение сохраняет, а для диссипативной сокращает площади на плоскости  $S$ .

Если решение системы периодическое, характеризуемое частотой  $f_1$ , то фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую и сечение Пуанкаре представляет собой в простейшем случае одну единственную точку (или несколько точек, если траектория очень извилистая и/или неудачно выбрана плоскость сечения). Если в решении появляется вторая частота  $f_2$  и аттрактор представляет собой двумерный тор, то точки в сечении Пуанкаре ложатся на замкнутую кривую, которая может иметь или не иметь точек самопересечения (рис.2.11). При этом точки могут образовывать на этой кривой конечное множество, если отношение частот  $f_1/f_2$  рационально и фазовая траектория представляет собой замкнутую линию, или покрывать кривую непрерывным образом, если отношение частот иррационально.

Посмотрим, как выглядит проблема устойчивости периодического решения с точки зрения отображения Пуанкаре. Вопрос состоит в том, является ли замкнутая траектория устойчивой по отношению к малым возмущениям. Иначе говоря, нужно узнать, как изменится положение точки  $P$  на следующем шаге, если на данном шаге внести возмущение в ее положение. Ограничиваясь линейным анализом устойчивости, для описания отображения Пуанкаре  $T(P)$  вводят матрицу

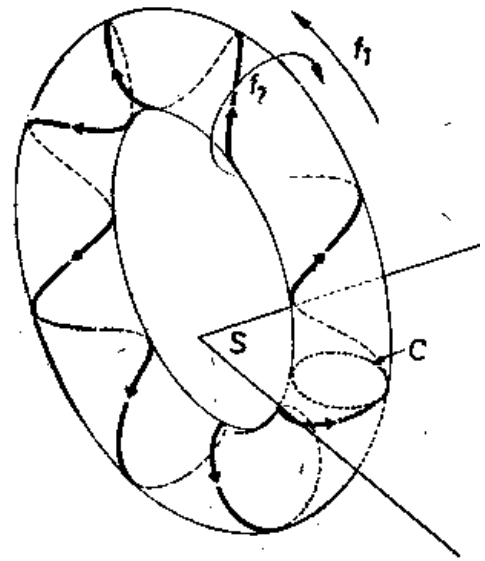


Рис. 2.11.

$$M = \left[ \frac{\partial T_i}{\partial x_j} \right], \quad i, j = 1, 2, \quad (2.8)$$

называемую матрицей Флоке. Эта матрица характеризует реакцию отображения  $T$  вдоль координаты  $i$  на возмущение вдоль координаты  $j$ . Устойчивость цикла определяется собственными значениями матрицы (2.8). Смещение траектории на следующем витке экспоненциально убывает со временем, если все собственные значения лежат внутри единичной окружности на комплексной плоскости. Если же какое-либо собственное значение становится по модулю больше единицы, то смещения растут со временем и цикл становится неустойчивым.

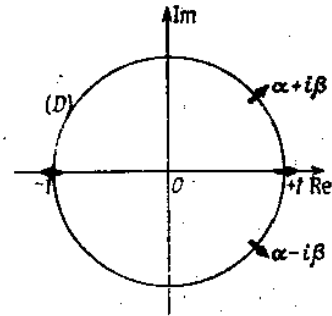


Рис. 2.12.

Изучение свойств матрицы Флоке позволяет не только определить устойчив или нет предельный цикл, но и узнать вид бифуркации, соответствующей потере устойчивости. Потеря устойчивости, как уже отмечалось выше, происходит при пересечении модуля собственного значения через единичную окружность. Это пересечение может происходить тремя различными способами (рис.2.12).

В первом случае, собственное значение действительно и пересекает окружность в точке  $+1$ . Этот переход соответствует бифуркации узел-седло, означающей, что появляется одно неустойчивое направление и периодическое движение разрушается.

Во втором случае, собственное значение также действительно, но пересекает окружность в точке  $-1$ . Момент перехода соответствует ситуации, когда траектория через раз снова попадает в прежнюю точку. Это так называемая бифуркация удвоения периода (субгармоническая бифуркация). Она может быть нормальной и обратной. При нормальной субгармонической бифуркации решение заменяется новым устойчивым периодическим решением с удвоенным периодом (см. параграф 1.7), при обратной бифуркации возникает временная перемежаемость, когда долгие интервалы почти периодического движения сменяются хаотическими осцилляциями.

Третий тип перехода возникает при комплексных собственных значениях. В этом случае пара комплексно-сопряженных значений одновременно пересекает единичную окружность. Этот переход отвечает бифуркации Хопфа (возникает блуждание траектории вокруг устойчивой прежде точки). Если бифуркация нормальная, то предельный цикл переходит в тор, если обратная, то вновь возникает перемежаемость.

### 2.3.2 Показатели Ляпунова

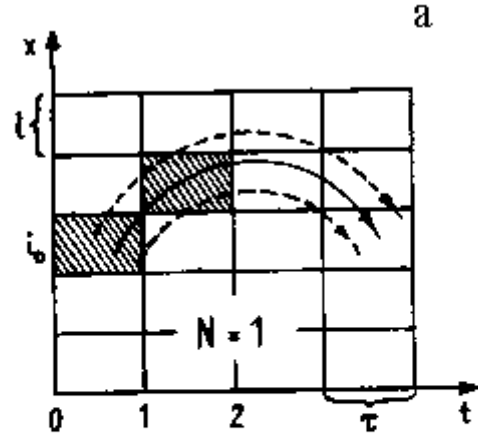
Теория Флоке рассматривает устойчивость замкнутой фазовой траектории, интересуясь при этом только поведением всего цикла в целом. Можно поставить вопрос и о локальной устойчивости траектории, независимо от того, является ли она замкнутой или нет. Иначе говоря, речь идет о характеристике скорости расхождения (схождения) начально близких траекторий в фазовом пространстве. Количественной мерой расходимости траекторий являются показатели Ляпунова.

Чтобы ввести показатели Ляпунова, необходимо рассмотреть эволюцию малого возмущения  $\delta\vec{X}(t)$  фазовой траектории  $\vec{X}(t)$ . Интегрируя численно исследуемую систему уравнений, можно построить матрицу  $M$ , связывающую вектор возмущений в момент времени  $t + \delta t$  с вектором в момент времени  $t$ :

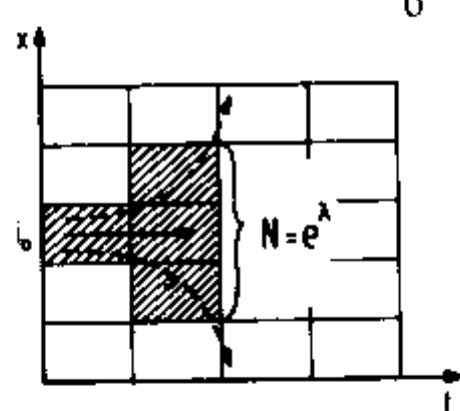
$$\delta\vec{X}(t + \delta t) = M(\delta t)\delta\vec{X}(t).$$

Для  $n$ -мерной системы матрица  $M$  будет иметь размерность  $n^2$  и  $n$  собственных значений. Траектория устойчива, если модули всех собственных чисел меньше единицы (или показатели степени при экспоненциальном представлении собственных чисел отрицательны). На практике интерес представляет наиболее опасное направление и определяется только один, самый большой показатель Ляпунова. Исходя из того, что на конечных временах возмущенная траектория уходит

Регулярное движение



Хаотическое движение



Случайное движение

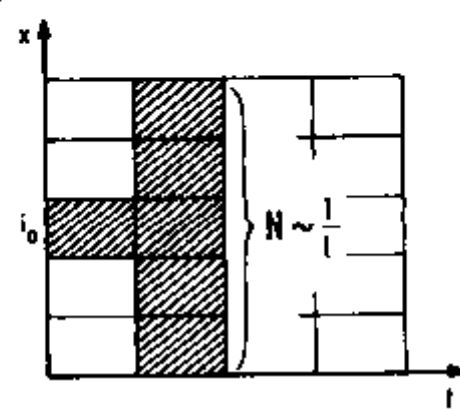


Рис. 2.13.

в самом неустойчивом направлении, практическое определение первого показателя Ляпунова можно реализовать по следующей схеме.

В точке  $\bar{X}(t)$  на заданной траектории вносится возмущение  $\delta\bar{X}(t)$ , отстоящее на расстояние  $d_0$  от основной траектории. Решая далее исследуемую систему уравнений для невозмущенного и возмущенного решения, вычисляют расстояние между траекториями  $d(t)$  через промежуток времени  $\tau$ . Далее, возмущенную точку снова устанавливают на расстоянии  $d_0$  от основной траектории, но так, что она остается в том направлении от точки  $\bar{X}(t+\tau)$ , что было получено в результате вычислений возмущенного решения. Тем самым на каждом шаге мы вычисляем скорость расхождения траекторий в наиболее опасном направлении. Считая, что расхождение траекторий подчиняется экспоненциальному закону  $d(t+\tau) = d_0 e^{\lambda\tau}$  и многократно повторяя эту процедуру, приходим к следующей формуле для вычисления первого показателя Ляпунова:

$$\lambda_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{i=1}^m \ln \frac{d_i}{d_0}.$$

### 2.3.3 Энтропия Колмогорова

Другой важной характеристикой хаотического движения в фазовом пространстве является энтропия Колмогорова (К-энтропия). Напомним, что энтропия есть мера беспорядка (в термодинамике) или мера информации, необходимой для определения положения системы в некотором состоянии (в теории информации) и определяется формулой

$$S = -\sum_i P_i \ln P_i,$$

где  $P_i$  есть вероятность нахождения системы в состоянии  $i$ .

Пусть система эволюционирует в  $d$ -мерном фазовом пространстве, которое разбивается на ячейки размера  $l$  (всего  $l^d$  ячеек). Состояние системы фиксируется через интервалы времени  $\tau$  и на каждом шаге регистрируется номер ячейки, в которой оказалась фазовая траектория  $\bar{X}(t)$ . Обозначим  $P_{i_0 \dots i_n}$  совместную вероятность того, что система, стартовав при  $t = t_0$  в ячейке  $i_0$ , прошла через ячейки  $i_1, i_2, \dots$  и в момент  $t = t_0 + n\tau$  оказалась в ячейке  $i_n$ . Информация, необходимая для определения положения системы на заданной траектории, пропорциональна энтропии Шеннона



$$K_n = - \sum_{i_0 \dots i_n} P_{i_0 \dots i_n} \ln P_{i_0 \dots i_n} .$$

Тогда, если известно, что система прошла цепочку состояний  $i_0 \dots i_n$ , то для предсказания положения системы на следующем шаге требуется дополнительная информация  $K_{n+1} - K_n$ . Иначе говоря, эта разность описывает потерю информации на шаге  $n+1$ .

Энтропия Колмогорова вводится как характеристика скорости потери информации

$$K = \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{n=0}^{m-1} (K_{n+1} - K_n) = - \lim_{\tau \rightarrow 0} \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m\tau} \sum_{i_0 \dots i_m} P_{i_0 \dots i_m} \ln P_{i_0 \dots i_m} . \quad (2.9)$$

Процедуру вычисления энтропии иллюстрирует рисунок 2.13 на примере одномерной системы с дискретным временем. Ось абсцисс соответствует времени, разбитому на интервалы длиной  $\tau$ . При рассмотрении дискретного времени предел по  $\tau$  не берется. Вероятность  $P_{i_0} = l$ , а число ячеек, в которые может попасть система на следующем шаге пусть остается постоянным и равным  $N$ . Тогда вероятность  $P_{i_0 i_1} = l/N$ ,  $P_{i_0 i_1 i_2} = l/N^2$ , а  $P_{i_0 \dots i_m} = l/N^m$ . Тогда общее число возможных траекторий есть  $M = N^m / l$  и

$$K = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i_0 \dots i_m} P_{i_0 \dots i_m} \ln P_{i_0 \dots i_m} = - \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} M \frac{l}{N^m} (\ln l - m \ln N) = \ln N .$$

На рис.2.13а показан пример регулярного движения, когда из ячейки  $i_0$  система однозначно переходит в данную ячейку  $i_1$  и т.д., а первоначально близкие траектории остаются близкими. В этом случае  $N = 1$  и  $K = 0$ . В случае, показанном на рис.2.13б, близкие траектории расходятся экспоненциально и  $N = e^\lambda$ . Тогда  $K = \lambda$  и, как видим,  $K$  - энтропия совпадает в этом случае с показателем Ляпунова. Последний случай (рис.2.13в) соответствует случайной системе, в которой на каждом шаге система с равной вероятностью оказывается в любой ячейке. Это приводит к тому, что  $N \rightarrow \infty$  и  $K \rightarrow \infty$ .

## 2.4 Спектры Фурье

### 2.4.1 Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Анализ Фурье играет особую роль при исследовании не только периодических, но также квазипериодических и стохастических сигналов. В контексте задач, рассматриваемых в этой главе, он интересует нас как инструмент, позволяющий отличать периодические режимы от стохастических, но значение метода Фурье в изучении проблемы турбулентности этим не исчерпывается. В дальнейшем мы увидим, насколько он полезен при численном исследовании турбулентных потоков и при обработке результатов измерений. Все это делает необходимым краткое изложение основных свойств непрерывного и дискретного преобразования Фурье.

Напомним, что Фурье предложил разложение функций в ряд по гармоническим функциям как метод решения уравнения теплопроводности, которое в одномерном случае имеет вид

$$\partial_t T = \eta \partial_{xx} T. \quad (2.10)$$

Если задача решается на отрезке  $(0, L)$  и имеет, например, нулевые граничные условия, то температура представляется рядом

$$T(x, t) = \sum_n b_n(t) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right). \quad (2.11)$$

Подстановка (2.11) в (2.10), дает уравнение

$$\sum_n \dot{b}_n(t) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) = -\eta \sum_n b_n(t) \left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \quad (2.12)$$

которое распадается на отдельные уравнения для каждой гармоники (для этого достаточно умножить уравнение на  $\sin(2\pi m/L)$  и проинтегрировать по рассматриваемому отрезку)

$$\dot{b}_m(t) = -\left(\frac{2\pi m}{L}\right)^2 \eta b_m(t). \quad (2.13)$$

Решение поставленной задачи становится в результате тривиальным: после разложения в ряд для каждой гармоники имеется решение (2.13), имея которые, можно восстановить по (2.11) распределение температуры в любой момент времени.

В общем случае периодическую функцию  $f(t)$  с периодом  $T$ , для которой существует интеграл  $\int_{-T/2}^{+T/2} |f(t)| dt$ , можно разложить в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}, \quad (2.14)$$

где  $\omega_0 = 2\pi / T$ , а коэффициенты Фурье определяются выражениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt, \quad (2.15)$$

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (2.16)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение.

Действительную функцию  $f(t)$  можно представить интегралом Фурье, если для нее существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ . Тогда

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(v) e^{2\pi i v t} dv, \quad (2.17)$$

$$\hat{f}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i v t} dt. \quad (2.18)$$

Здесь  $\hat{f}(v)$  есть фурье-образ функции  $f(t)$ ,  $v$  - частота (будем также пользоваться круговой частотой  $\omega = 2\pi v$ ). Отметим, что когда речь идет о преобразовании Фурье от функции координат  $f(x)$ , то в преобразовании вместо частот появляются волновые числа  $k$  и  $\gamma$  ( $k = 2\pi\gamma$ , в полной аналогии с частотами).

## 2.4.2 Основные свойства фурье-преобразования

Приведем формулировки основных теорем, касающихся свойств непрерывного фурье-преобразования, помня при этом, что все они имеют прямой аналог в терминах дискретного преобразования.

Итак, пусть  $f(x)$  - действительная функция, для которой существует интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ . Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \widehat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (2.19)$$

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.20)$$

или, с учетом связи  $k = 2\pi\gamma$ ,

$$f(x) = \int \widehat{f}(\gamma) e^{2\pi i \gamma x} d\gamma$$

$$\widehat{f}(\gamma) = \int f(x) e^{-2\pi i \gamma x} dx$$

Используя для преобразования Фурье обозначение

$$\widehat{f}(k) = \widetilde{F}[f(x)],$$

сформулируем его основные свойства.

1. Единственность: преобразование (2.19)-(2.20) однозначно.

2. Линейность:

$$\widetilde{F}[\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] = \alpha_1 \widehat{f}_1(k) + \alpha_2 \widehat{f}_2(k). \quad (2.21)$$

3. Теорема о масштабах:

$$\widetilde{F}[f(\alpha x)] = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right). \quad (2.22)$$

4. Теорема о сдвиге:

$$\widetilde{F}[f(x+a)] = e^{ika} \widehat{f}\left(\frac{k}{n}\right). \quad (2.23)$$

5. Теорема о свертке<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(f_1 * f_2) &= \widehat{f}_1(k) \cdot \widehat{f}_2(k), \\ \widetilde{F}(f_1 \cdot f_2) &= \widehat{f}_1(k) * \widehat{f}_2(k). \end{aligned} \quad (2.24)$$

6. Теорема о дифференцировании:

$$\widetilde{F}(f^{(n)}(x)) = (ik)^n \widehat{f}(k). \quad (2.25)$$

7. Теорема Парсеваля<sup>3</sup>:

$$\int f_1(x) f_2^*(x) dx = \int \widehat{f}_1(k) \widehat{f}_2^*(k) dk. \quad (2.26)$$

<sup>2</sup> Напомним, что сверткой называется интегральная операция  $f_1(x) * f_2(x) = \int f_1(x-x') f_2(x') dx$

<sup>3</sup> Важным следствием теоремы Парсеваля является сохранение энергии:  $\int |f(x)|^2 dx = \int |\widehat{f}(k)|^2 dk$

8. Теорема о комплексном сопряжении:

$$\tilde{F}(f^*) = \hat{f}^*(-k). \quad (2.27)$$

Если  $f$  - вещественное число, то  $\tilde{F}(f^*) = \tilde{F}(f) = \hat{f}^*(-k)$  т.е.  $\hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$

### 2.4.3 Спектры

Пусть имеется временной сигнал  $f(t)$ , для которого существуют преобразования (2.17)-(2.18). Для этого сигнала можно ввести корреляционную функцию (автокорреляцию)

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)f(t+\tau)dt. \quad (2.28)$$

Корреляционная функция (2.28) есть среднее произведение двух значений сигнала, сдвинутых на величину  $\tau$  и характеризует степень зависимости текущего значения сигнала от его предыдущих значений.

Спектральной плотностью сигнала  $f(t)$  называется функция  $F(v) = |\hat{f}(v)|^2$ . Связь спектральной плотности с автокорреляционной функцией устанавливает теорема Хинчина-Винера:

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{N}(\tau) e^{-2\pi i v \tau} d\tau. \quad (2.29)$$

Следует отметить, что обрабатываемые сигналы представляют собой, как правило, последовательность дискретных точек (по крайней мере, сигнал становится таковым на этапе ввода в цифровую вычислительную машину). В этом случае приходится иметь дело с конечной выборкой и важной становится теорема Котельникова, утверждающая, что функция  $f(t)$ , спектр которой ограничен конечным интервалом частот  $-v_{\max} < v < v_{\max}$ , однозначно определяется выборкой на дискретном множестве точек с шагом

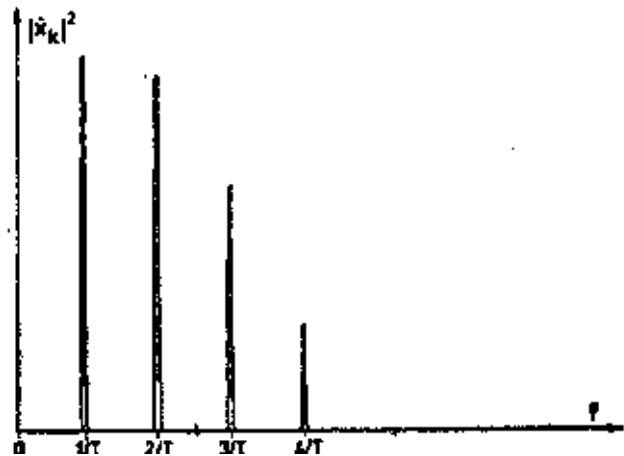


Рис. 2.14.

$\Delta t = 1/2\nu_{\max}$ . Точнее говоря, функция  $f(t)$  восстанавливается по конечной выборке  $f_n = f(n\Delta t)$  с помощью соотношения

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \frac{\sin \pi \left( \frac{t}{\Delta t} - n \right)}{\pi \left( \frac{t}{\Delta t} - n \right)}. \quad (2.30)$$

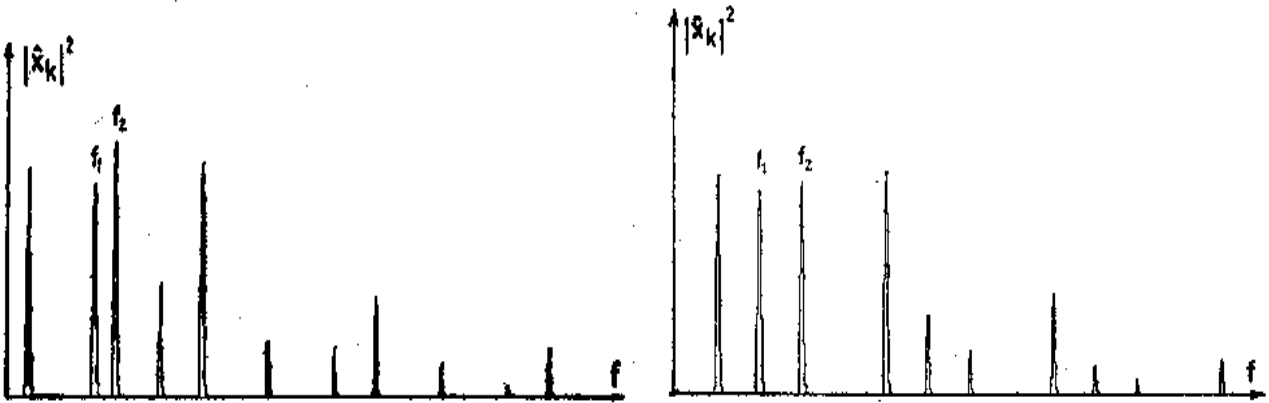


Рис. 2.15.

Другими словами, теорема Котельникова устанавливает предельную частоту, которая может быть определена по сигналу, регистрируемому с шагом  $\Delta t$ .

При дискретной выборке, состоящей из  $N$  равноотстоящих точек, исходному ряду соответствует ряд фурье-коэффициентов (2.16), которые для действительного сигнала равны

$$\hat{f}_n = \sum_{m=1}^N f_m e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \quad (2.31)$$

Спектральной плотности  $F(\nu)$  при дискретном представлении соответствует ряд величин  $F_n = |\hat{f}_n|^2$ , называемый спектром мощности (а также энергетическим спектром, или просто спектром Фурье).

Остановимся на том, как выглядят спектры различных типов сигналов. Начнем со случая, когда функция  $f(t)$  есть периодический сигнал с периодом  $T$ . В про-

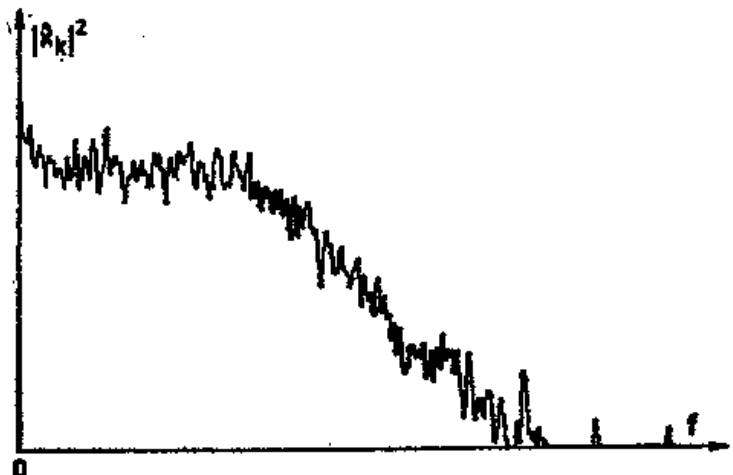


Рис. 2.16.

стейшем случае это гармонический сигнал (синус или косинус) и его спектр состоит из одной ненулевой компоненты с частотой  $1/T$ . Для периодического сигнала другой формы в спектре появляются кратные гармоники (с частотами  $2/T, 3/T, 4/T, \dots$ ) (рис.2.14).

Более сложно выглядит спектр квазипериодического сигнала. Как уже указывалось выше, аттрактор квазипериодического движения представляет собой тор размерности  $d$ . Это означает, что у функции существует  $d$  аргументов, по которым функция периодична с соответствующими периодами  $\delta_i$ . В общем случае спектр квазипериодического движения может иметь довольно сложный вид. Просто он выглядит только тогда, когда сигнал есть суперпозиция периодических функций и спектр в силу линейности преобразования представляет собой сумму спектров отдельных периодических функций. Если квазипериодическая функция есть нелинейная комбинация периодических функций, то ее спектр содержит комбинационные частоты типа  $n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + \dots + n_d\nu_d$ . На рисунке 2.15 показаны два спектра квазипериодических сигналов с двумя частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . При этом, на рис.2.15а показан случай, когда отношение частот есть величина иррациональная, а на рис.2.15б это отношение рационально и равно  $2/3$ . Во втором случае все пики в спектре соответствуют гармоникам с частотами, кратными разности частот  $(\nu_2 - \nu_1)$ . В обоих случаях спектр сигналов остается дискретным.

На рисунке 2.16 показан типичный спектр аperiodического сигнала. В отличие от предыдущих спектров он непрерывен (сплошной, или заполненный спектр). На практике вопрос о принадлежности спектра аperiodическому или квазипериодическому сигналу не всегда прост, так как квазипериодический сигнал с большим числом частот приближается по своему виду к спектру стохастического сигнала. Предельный вид стохастического сигнала называют белым шумом. Это сигнал с плоским спектром, корреляционная функция которого есть дельта-функция.

## 2.5 Странный аттрактор

Теперь вернемся к вопросу о том, каким должен быть аттрактор хаотического движения. Мы уже упоминали выше, что первый сценарий перехода к Хаосу был предложен Ландау и представлял собой бесконечную цепочку бифуркаций Хопфа. Такому движению соответствует аттрактор в виде тора  $T^\infty$ . Но уже система с тремя степенями свободы дает сплошной спектр Фурье, что является признаком хаотического движения.

Необходим аттрактор, который объясняет хаотическое поведение системы в фазовом пространстве низкой размерности (для определенности будем иметь в виду трехмерное фазовое пространство, так как известно, что в трехмерных нелинейных системах возможно существование хаотических режимов). Соответствующий аттрактор был предложен Рюэлем и Таккенсом в 1971г. и назван странным аттрактором. Эти же авторы предложили и сценарий перехода к турбулентности, состоящий в том, что в системе после двух бифуркаций Хопфа (приводящих к появлению в спектре двух независимых частот) происходит третья бифуркация, приводящая к возникновению странного аттрактора (и появлению заполненного спектра).

Важнейшим свойством, которым должен обладать аттрактор хаотического движения является чувствительность к заданию начальных условий (ЧЗНУ). Это означает, что близкие траектории должны расходиться (должны быть положительные показатели Ляпунова) или, иными словами, система должна забывать о начальных условиях благодаря наличию малых возмущений.

В то же время нужно помнить, что речь идет о диссипативных системах, в которых объем в фазовом пространстве сокращается и объем аттрактора должен быть равен нулю. Потеря памяти о начальных условиях обеспечивается и сокращением объемов, так как независимо от начальных условий фазовая траектория выходит на аттрактор. Чтобы объем множества точек был равен нулю, его размерность  $d$  должна быть меньше размерности пространства. Следовательно,

$$d < 3.$$

Из требования ЧЗНУ следует, что траектории в фазовом пространстве должны расходиться, однако, система является детерминированной, а это означает, что в каждой точке должно существовать единственное решение и траектории не должны пересекаться (разве что в конечном числе особых точек). С учетом того, что траектория должна занимать конечную область фазового пространства, на плоскости эти два требования совместить не возможно и мы приходим ко второму ограничению на размерность аттрактора:



$$d > 2.$$

Таким образом, апериодический (странный) аттрактор должен:  
 а) притягивать фазовые траектории из области притяжения;  
 б) удовлетворять требованию ЧЗНУ

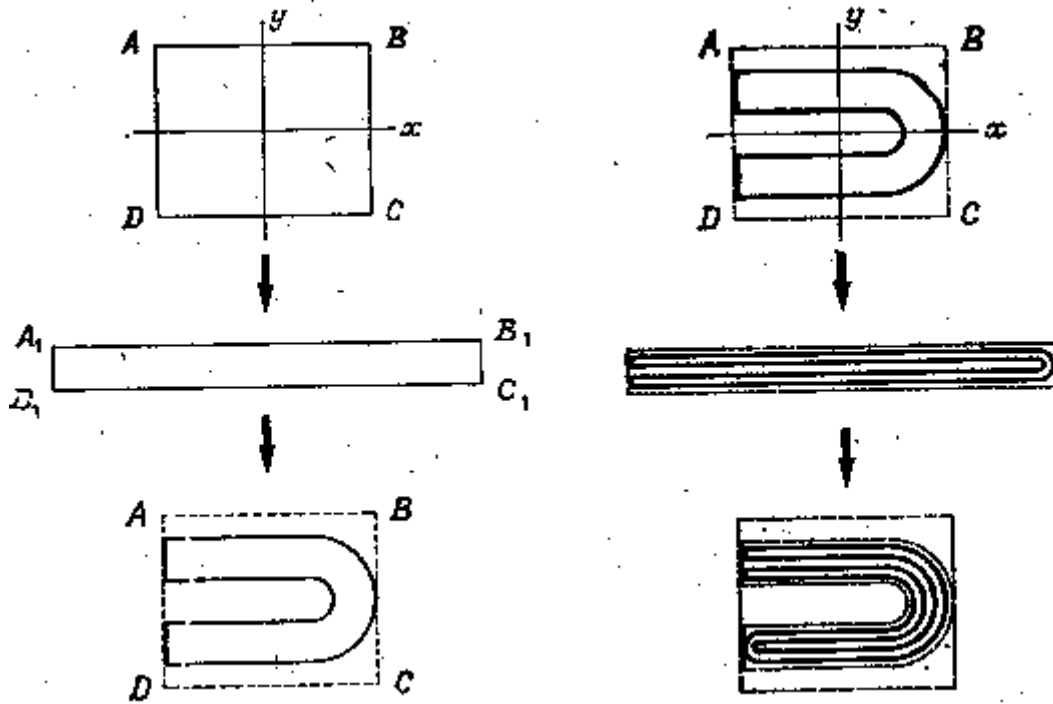


Рис. 2.17.

в) иметь дробную размерность (в конкретном случае размерность между двойкой и тройкой).

Отложим вопрос о дробной размерности до следующего параграфа и приведем несколько качественных соображений, касающихся возможной структуры аттрактора с такими свойствами.

Моделью возможного построения странного аттрактора является так называемая подкова Смейла. Эта модель отражает важное свойство странных аттракторов - они всегда содержат в себе элементы растяжения с последующим складыванием.

Построение подковы Смейла иллюстрирует рисунок 2.17. Имеется прямоугольник, который растягивается в 2 раза вдоль оси  $x$  и сжимается в  $2\eta$  раз вдоль оси  $y$ . Коэффициент  $\eta > 1$  и характеризует степень сжатия площади.

На втором шаге вытянутый прямоугольник складывается в подкову и возвращается таким образом в исходную область пространства. При этом

он занимает не всю исходную область, так как появились пробелы, обусловленные сжатием.

Третий шаг повторяет первый и так далее. Отметим, что деформацию можно характеризовать числами (показателями) Ляпунова. Растяжение по оси  $x$  характеризуется положительным показателем  $\lambda_1 = \ln 2$ , а сжатие по оси  $y$  - отрицательным показателем  $\lambda_2 = -\ln 2\eta$ .



Рис. 2.18.

Вертикальное сечение полученного объекта в точности воспроизводит так называемое канторово множество, размерность которого будет определена в следующем параграфе. Здесь же отметим только, что в пределе слабой диссипации ( $\eta \rightarrow 1$ ) размерность подковы стремится к двум (она занимает почти всю плоскость). В пределе сильной диссипации ( $\eta \rightarrow \infty$ ) на плоскости остаются редкие линии и размерность множества стремится к единице.

Другую попытку представить возможность существования аттрактора с требуемыми свойствами представляет рисунок 2.18. На первом шаге происходит разбегание траекторий (обеспечивающее ЧЗНУ). На втором происходит складывание и на третьем - сворачивание полученной пространственной структуры в «кольцо» таким образом, что сложенная вдвое растянутая сторона смыкается с начальной недеформированной. Вспоминая, что траектории не должны при этом пересекаться, мы приходим к выводу, что должна образоваться многолистная структура.

## 2.6 Фракталы

### 2.6.1 Понятие фрактала

Пусть имеется множество точек, расположенных в некотором пространстве размерностью  $D$ . Введем сферу радиуса  $r$  (гиперсферу, если  $D > 3$ ) и будем подсчитывать среднее число точек  $N$ , попадающих в сферу при различных ее положениях в пространстве. Естественно рассчитывать на то, что зависимость числа точек от радиуса сферы будет иметь степенную форму

$$N(r) \approx r^d \quad (2.32)$$

и размерность множества есть

$$d = \frac{\ln N(r)}{\ln r}. \quad (2.33)$$

Если точки множества расположены на линии, то  $d = 1$ , если они лежат на плоскости, то  $d = 2$ , а если точки занимают все трехмерное пространство, то опять же получается обычная (евклидова) размерность  $d = 3$ .

Фракталами называют объекты с нецелой размерностью. Простейшим примером фрактального множества является канторово множество, строящееся по следующему правилу. Единичный отрезок разбивается на

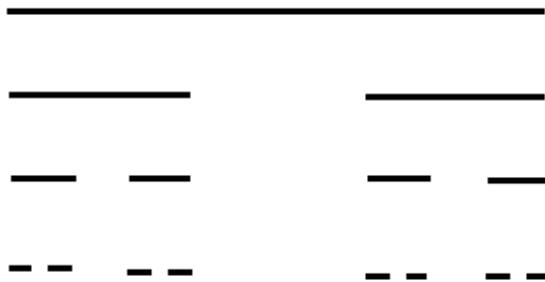


Рис. 2.19.

три равных части и средняя часть удаляется. На втором шаге каждый из оставшихся двух отрезков снова делится на три части с последующим удалением центральных частей. Процедура повторяется до бесконечности (рис.2.19). Таким образом, получается такое множество, что любой сколь угодно малый объем области обязательно содержит точки, этому множеству не принадлежащие.

Оценим размерность построенного множества по формуле (2.33). Из процедуры построения множества следует, что при каждом увеличении радиуса сферы в три раза, число точек, в нее попадающих, увеличивается вдвое ( $r \approx 3^n$ ,  $N \approx 2^n$ ). Следовательно,

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63.$$

Это не единственный способ определения фрактальной размерности. Наиболее известна так называемая размерность Хаусдорфа-Безиковича. Она определяется следующим образом. Пусть  $N(l)$  - наименьшее число кубов (сфер) с ребром (диаметром)  $l$ , которым можно покрыть все точки множества. Тогда размерность Хаусдорфа - Безиковича есть

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (2.34)$$

Оценивая размерность введенного выше канторова множества по (2.34), мы приходим к тому же самому результату, что и при вычислениях по формуле (2.33). Одинаковый результат получается при оценке размерности однородных фракталов. Несколько примеров однородных фракталов и по-

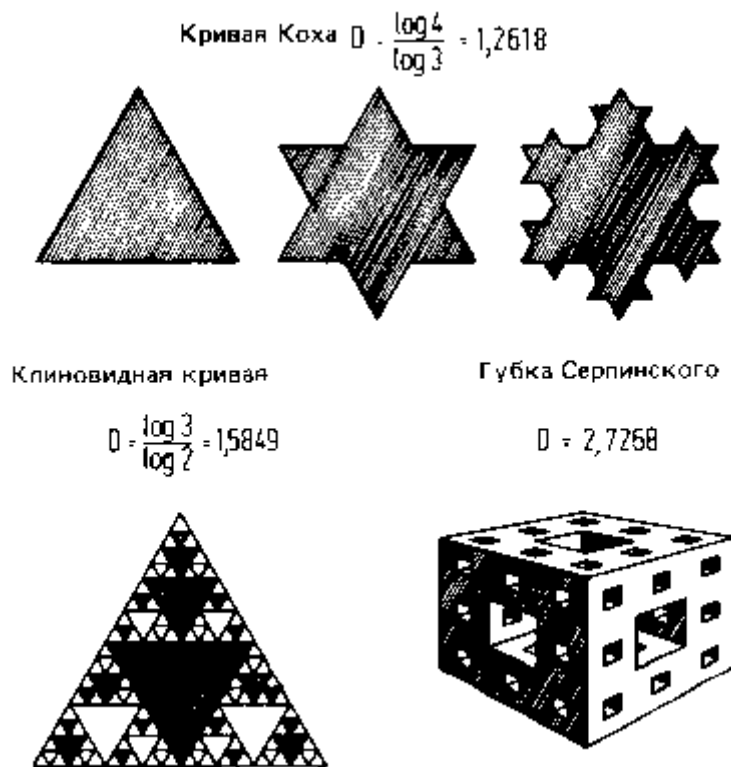


Рис. 2.20.

лучаемые для них размерности приведены на рис.2.20. В общем случае неоднородных фракталов размерности  $d$  и  $D$  могут не совпадать, но всегда  $d \leq D$  (см. п.1.6.3).

Объекты с фрактальными свойствами возникают в самых различных приложениях. Одной из первых практических задач, приведших к развитию

теории фракталов, была задача об определении длины береговой линии. Проблема состоит в том, что по мере использования карт с более мелким разрешением получаемая длина береговой линии все увеличивается и процесс не сходится. Береговая линия является, таким образом, типичным фрактальным объектом (сравните со структурой снежинки Коха, рис.2.20). Фрактальными свойствами обладают облака, кораллы, растущие кристаллы, семейства трещин при процессах разрушения и поле диссипации энергии в развитом турбулентном течении.

К фракталам приводят многие математические задачи. Простейший пример дает задача о границах областей притяжения рациональных отображений комплексной плоскости в себя. Например, рассматривается уравнение

$$z^3 = 1,$$

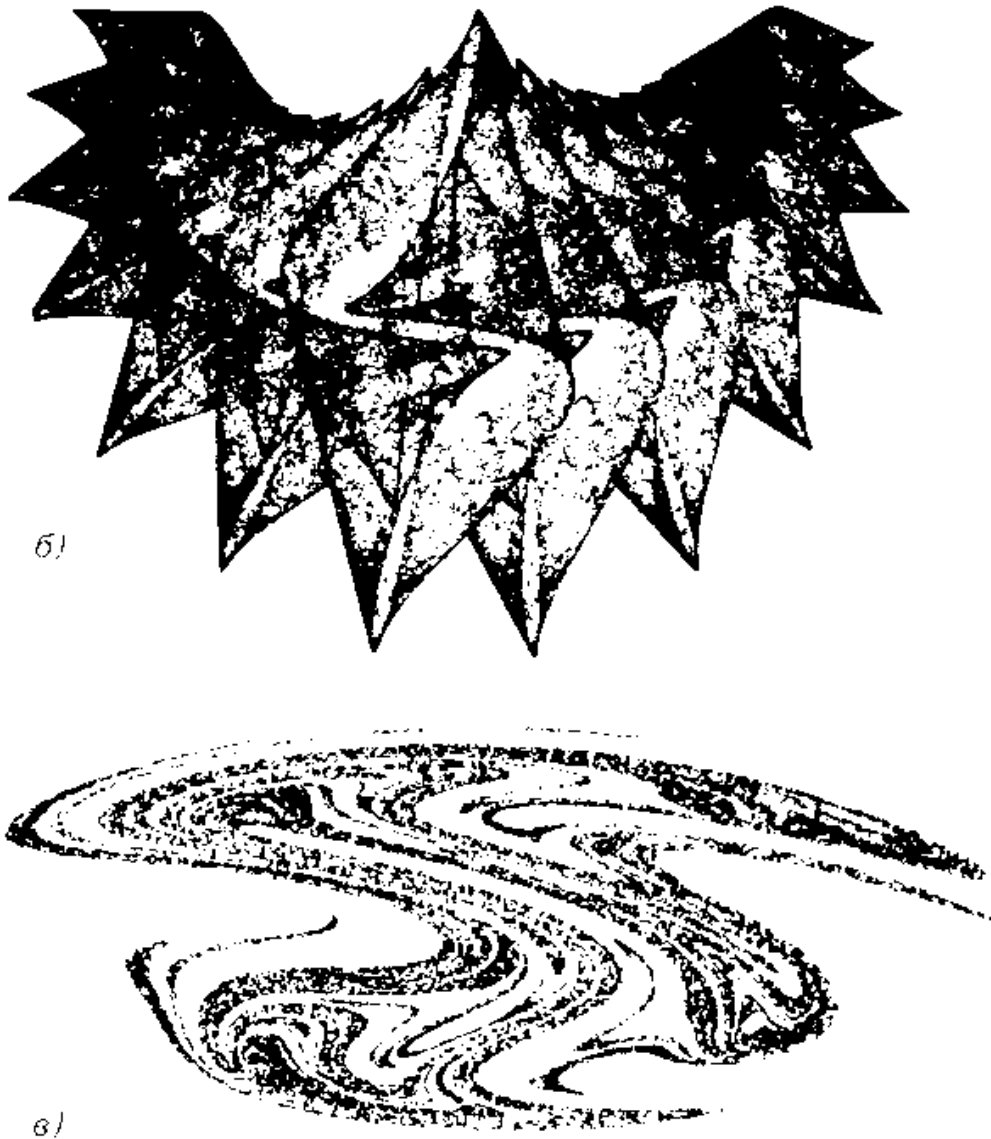


Рис. 2.21.

имеющее три корня  $(1, -1/2 + i\sqrt{3}/2, -1/2 - i\sqrt{3}/2)$ , и используется итерационный метод Ньютона для его решения. Это значит, что для уравнения  $f(z) = 0$  строится последовательность значений  $z_n$ , таких, что

$$f(z_n) + (z_{n+1} - z_n)f'(z_n) = 0.$$

В нашем случае это приводит к выражению

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}. \quad (2.35)$$

Итерационный процесс (2.35) стартует с различных начальных значений  $z_0$  на комплексной плоскости и приводит, в конце концов, к одному из трех корней уравнения. Задача состоит в том, чтобы построить границу раздела трех областей притяжения. Такие границы называются множествами Жюлиа (задача Жюлиа датируется 1918 годом!) и обладают замечательным свойством: каждая точка границы разделяет все три области притяжения.

Множества Жюлиа строятся и для логистического уравнения

$$z_{n+1} = z_n^2 + C,$$

для которого показано (Мандельброт, 1980г.), что уравнение существует только для определенных значений  $C$  на комплексной плоскости. Приняв за линию уровня число итераций, необходимых для попадания в  $\varepsilon$ -окрестность решения и рисуя разные уровни разными цветами, получают живописные картинки, украшающие многие книги и журнальные статьи. Мы не приводим их из-за бедности черно-белого представления и отсылаем к соответствующим изданиям (см. список рекомендуемой литературы).

Эстетическое наслаждение можно получить и от рассматривания изображений аттракторов динамических систем, примеры которых можно видеть на рисунке 2.21. (На рисунке, взятом из книги Г.Шустера «Детерминированный хаос», показаны примеры странного аттрактора и сечения Пуанкаре, полученные при решении уравнения для нелинейных осцилляторов.) Вспоминая, что именно размерность аттракторов динамических систем с хаотическим поведением заставили нас обратиться к фракталам, вернемся к вопросу о том, как именно можно измерить размерность аттрактора.

## 2.6.2 Алгоритм вычисления размерности аттрактора

Вопрос об измерении размерности аттрактора становится особенно сложным при попытках обработки экспериментальных данных, когда даже вопрос о размерности фазового пространства, то есть вопрос о необходимом числе независимых переменных, остается открытым. Подход к решению этой задачи дает так называемая теорема Таккенса, суть которой состоит в следующем.

Пусть имеется динамическая система (не слишком большой размерности  $N$ ), описываемая системой дифференциальных уравнений первого порядка. Принципиально, от системы  $N$  уравнений первого порядка можно перейти к дифференциальному уравнению  $N$ -ого порядка, содержащему  $N$  производных, но одной переменной (например, остается переменная  $X(t)$  и ее производные  $\dot{X}(t)$ ,  $\ddot{X}(t)$ ,  $\ddot{\ddot{X}}(t)$ , и т.д.). При представлении дифференциальных уравнений в конечных разностях

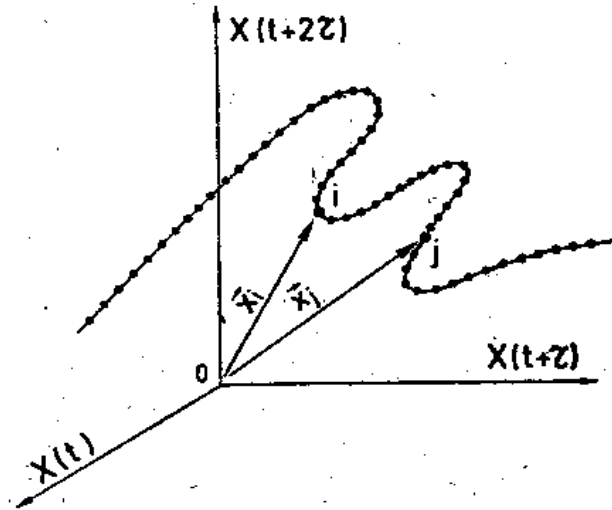


Рис. 2.22.

это соответствует одновременному знанию величин  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,  $X(t+2\tau)$ ,  $X(t+3\tau)$ , и т.д., где  $\tau$  - постоянная. Теорема Таккенса утверждает, что каждая переменная системы  $X(t)$  отражает основные свойства этой системы, а аттрактор, построенный в фазовом пространстве переменных  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,  $X(t+2\tau)$ ,  $X(t+3\tau)$ ,....., сохраняет основные топологические свойства аттрактора исходной системы.

Практически, алгоритм вычисления размерности аттрактора строится следующим образом. Для измеряемой величины  $X(t)$  выбирается характерное время сдвига  $\tau$  и строится фазовая траектория на  $p$  переменных  $X(t)$ ,  $X(t+\tau)$ ,.....,  $X(t+(p-1)\tau)$  как показано на рисунке 2.22. Эта траектория состоит из последовательности точек, каждая из которых определяется в фазовом пространстве вектором  $\vec{X}_i$ . В каждую из этих точек помещается гиперсфера радиуса  $r$  и вычисляется число точек фазовой траектории, попавших в пределы этой сферы. Затем вводится функция

$$C(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^m H(r - |\vec{X}_i - \vec{X}_j|), \quad (2.36)$$

характеризующая среднее число пар точек, попадающих в сферу заданного радиуса. Здесь  $H$  - функция Хевисайда, равная по определению единице при положительных и нулю при остальных значениях аргумента. Ожидая, что

$$C(r) \approx r^d,$$

строят эту функцию в двойном логарифмическом масштабе и при наличии в таком представлении прямолинейного участка определяют его наклон, равный величине  $d$ . Отметим, что степенной закон можно ожидать только на масштабах  $r$ , заметно меньших размеров области, занимаемой аттрактором.

Процедура вычисления величины  $d$  повторяется для все возрастающих значений размерности используемого фазового пространства  $p$ . При этом вычисленные значения  $d$  равны  $p$  до тех пор, пока размерность используемого пространства остается меньшей размерности аттрактора. Если вычисленная размерность  $d$  перестает зависеть от  $p$ , то это означает, что она равна размерности самого аттрактора. Наименьшее целое число, большее полученной (фрактальной) размерности аттрактора, называется размерностью вложения и определяет реальное число степеней свободы рассматриваемой системы. Пример поведения функции  $C(r)$  по мере роста  $p$ , построенная по результатам реальных измерений в конвекции Релея-Бенара (из работы Malraison B. et al., Comptes Rendus Acad.Sc.Paris, 1983, C297, p.209.) приведена на рис.2.23. В этом примере наклон прямых линий перестает возрастать с  $p = 4$ , хотя предельный наклон прямых есть 2,8 (то есть размерность вложения равна трем).

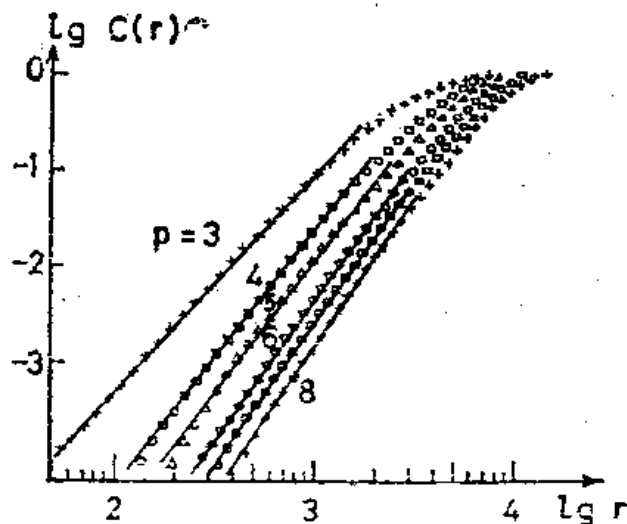


Рис. 2.23.



### 2.6.3 Обобщенная размерность

Пусть система эволюционирует в некотором фазовом пространстве. Разобьем это пространство на ячейки ( $n$ -мерные кубики) с ребром  $l$  (всего  $M$  ячеек) и вычислим вероятность попадания системы в каждую  $i$ -тую ячейку

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}.$$

Где  $n_i$  - число точек, попавших в данную ячейку, а  $N$  - общее число рассмотренных точек.

Обобщенная размерность (размерность Рени) определяется как

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^q}{\ln l}. \quad (2.37)$$

Таким образом вводится последовательность величин  $D_q$ , связанных с соответствующими моментами распределения вероятности. Посмотрим, какой смысл имеет эта величина при конкретных значениях  $q$ .

1)  $q = 0$ . Тогда

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^0}{\ln l}$$

сумма в числителе равна числу ячеек, в которых оказалась хотя бы одна точка. Следовательно,

$$D_0 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}, \quad (2.38)$$

где  $N(l)$  есть число ячеек, содержащих точки, и (2.38) совпадает, таким образом, с определением размерности Хаусдорфа (2.34).

2)  $q = 1$ . В этом случае возникает проблема деления на ноль. Рассматривается предел  $q \rightarrow 1$  и с помощью правила Лопиталья

$$D_1 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^q}{q-1} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{\ln l} \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum_{i=1}^M p_i^q \ln p_i}{\sum_{i=1}^M p_i^q} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^M p_i \ln p_i}{\ln l} \quad (2.39)$$

Числитель под знаком предела есть энтропия Шенона, а размерность  $D_1$  называют информационной размерностью.

3)  $q = 2$ . Теперь в числителе под знаком суммы стоит квадрат вероятности попадания точки в ячейку, то есть совместная вероятность одновременного попадания пары точек. Таким образом,

$$D_2 = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^M p_i^2}{\ln l} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \tilde{N}(l)}{\ln l}, \quad (2.40)$$

где  $\tilde{N}(l)$  есть функция (2.36), а размерность (2.40) называется корреляционной размерностью.

Справедливо общее правило:  $D_i \geq D_j$ , если  $i < j$ . Это означает, что наибольшее значение всегда имеет Хаусдорфова размерность  $D_0$ .

## 2.7 Субгармонический каскад

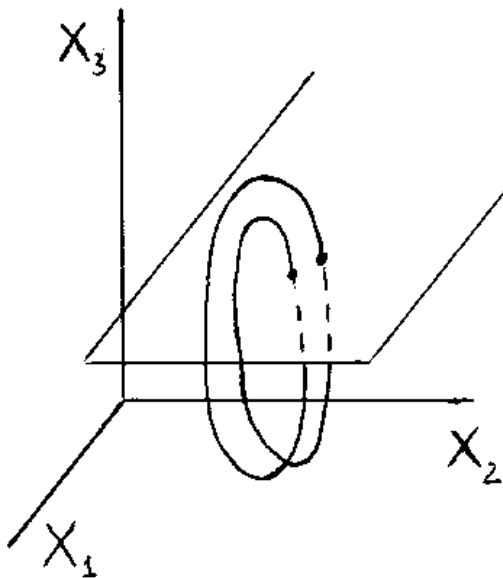


Рис. 2.24.

В этом параграфе речь пойдет о переходе к хаотическому движению по сценарию, называемому субгармоническим каскадом и представляющему собой последовательность бифуркаций удвоения периода. Мы уже упоминали бифуркацию этого типа, разбирая возможные типы потери устойчивости траектории при анализе матрицы Флоке. Качественно перестройку фазовой траектории, соответствующую бифуркации удвоения периода, иллюстрирует рисунок 2.24. Предельный цикл после бифуркации замыкается только на втором витке, удваивая тем самым период движения системы в фазовом пространстве.

При это в сечении Пуанкаре число точек удваивается, а в спектре Фурье появляется новая частота, вдвое меньшая той, что была до бифуркации.

Прекрасной иллюстрацией свойств субгармонического каскада является работа Фейгенбаума «Универсальное поведение квадратичных отображений» (Feigenbaum M.J., The universal properties of nonlinear transformations, J.Stat.Phys., 1979, V.21, P.669.), содержание которой мы в основном и постараемся пересказать.

Рассмотрим отображение первого возвращения

$$x_{k+1} = f(x_k) = 4\mu x_k(1 - x_k) \quad (2.41)$$

где  $x \in [0,1]$  и  $0 \leq \mu \leq 1$ . Отображение ставит в соответствие каждой точке из интервала  $[0,1]$  другую точку из этого же интервала.  $\mu$  - управляющий параметр.

При  $\mu < 0,25$  существует только одна точка, в которой  $x_{k+1} = x_k$ . Это точка  $x = 0$  и она устойчива. Действительно,

$$f'(x) = 4\mu(1 - 2x)$$

и

$$f'(0) = 4\mu.$$

Это означает, что при  $\mu < 1/4$  производная в точке пересечения функции

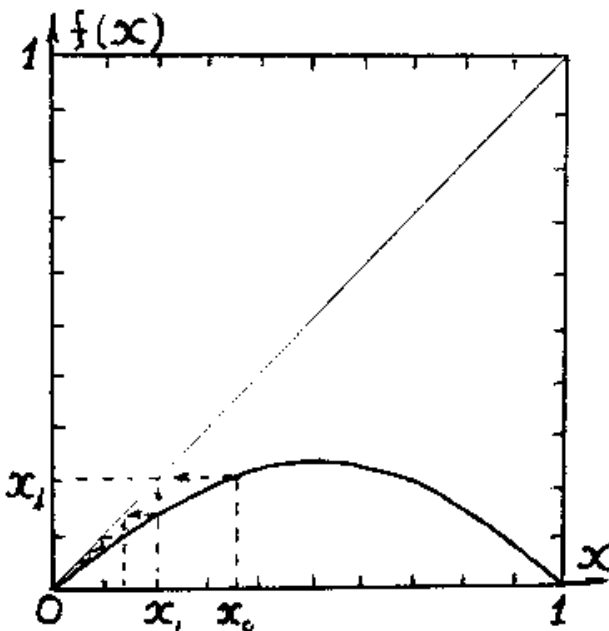


Рис. 2.25.

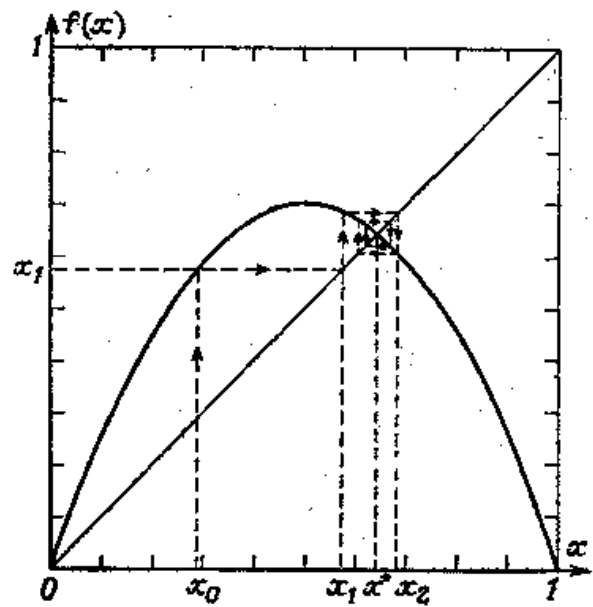


Рис. 2.26.

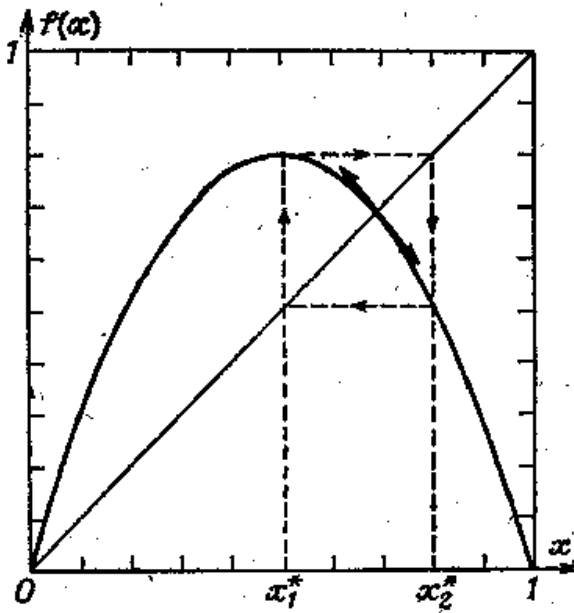


Рис. 2.27.

$f(x)$  с биссектрисой  $x_{k+1} = x_k$  остается меньше единицы, что обеспечивает устойчивость решения (см. рис.2.25).

При  $0,25 < \mu < 0,75$  решение  $x = 0$  становится неустойчивым, но появляется другое решение

$$x^* = 1 - \frac{1}{4\mu},$$

которое устойчиво, так как при  $0,25 < \mu < 0,75$

$$|f'(x^*)| = 2|1 - 2\mu| < 1.$$

Путь, по которому решение выходит в этом случае на устойчивую точку, показан на рис.2.26. В точке  $\mu = \mu_1 = 0,75$  и эта точка становится неустойчивой.

Характер возникающего решения иллюстрирует рисунок 2.27, где показано решение для  $\mu = 0,8$ . В решении возникают две неподвижные точки. Это так называемый 2-цикл, при котором решение возвращается в данную точку через шаг. Иначе говоря, решение определяется условием:  $x_{k+2} = x_k$ . Запишем

$$x_{k+2} = f(x_{k+1}) = f^2(x_k) = g(x_k),$$

где явный вид функции  $g$  есть

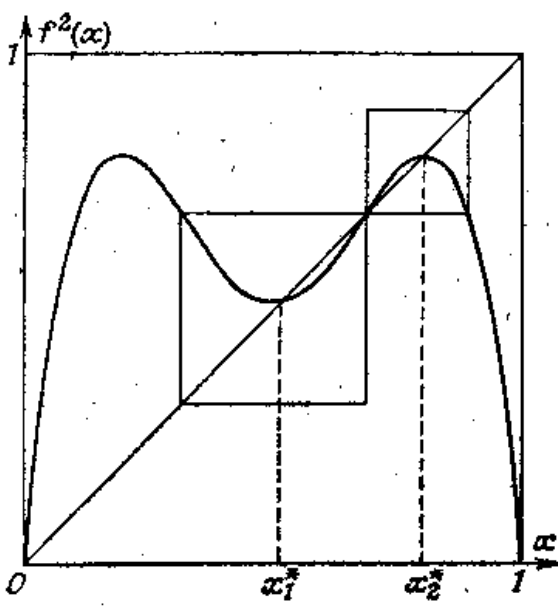


Рис. 2.28.

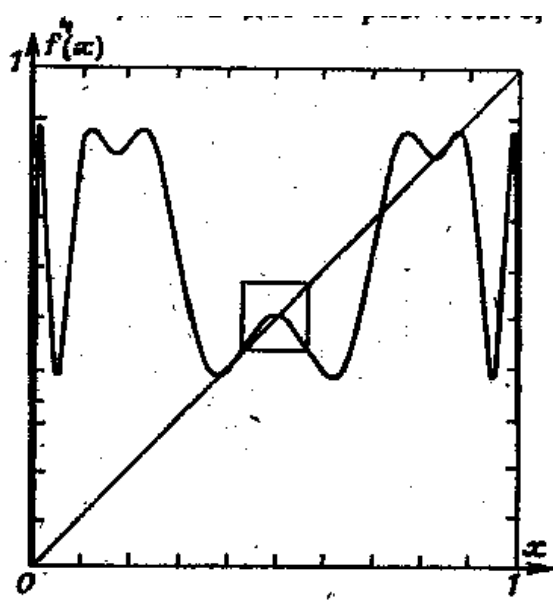


Рис. 2.29.

$$g(x) = 16\mu^2(x - x^2 - 4\mu x^2 + 8\mu x^3 - 4\mu x^4).$$

График этой функции показан на рисунке 2.28, а два выделенных квадрата поясняют тот факт, что в них воспроизводится картинка, представленная на рис.2.26. В дальнейшем все повторяется. Функция  $g(x)$  теряет устойчивость при  $\mu = \mu_2 = (1 + \sqrt{6})/4 = 0,86237\dots$ . Далее рассматривается функция

$$h(x) = g^2(x) = f^4(x),$$

представленная на рис.2.29. Квадрат на рисунке снова показывает, что вблизи каждой устойчивой точки воспроизводится ситуация рисунка 2.26. Функция  $h(x)$  становится неустойчивой при  $\mu = \mu_3 = 0,875$ , и т.д. Каждый раз имеет место бифуркация удвоения периода (период цикла удваивается). Фейгенбаум обнаружил два закона подобия, характеризующих субгармонический каскад. Во первых, он показал, что последовательность  $\mu_i$  быстро сходится

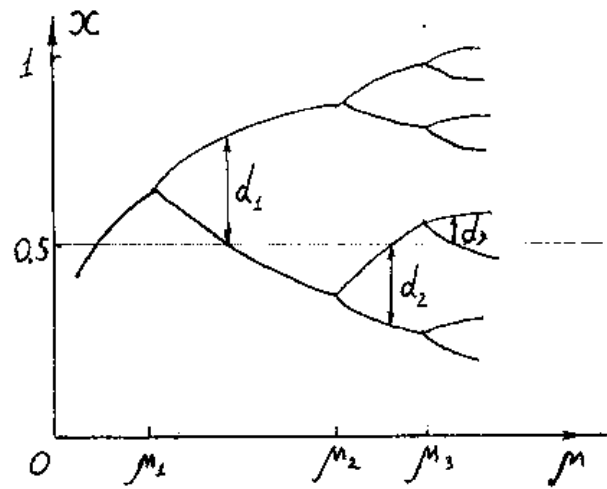


Рис. 2.30.

$$\mu_\infty = 0,892486418\dots,$$

и существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta.$$

Важно, что величина  $\delta$  не зависит от конкретного вида функции  $f(x)$  (любая выпуклая, непрерывная, дифференцируемая функция с одним максимумом) и равна

$$\delta = 4,6692016091\dots$$

Это первый закон подобия. Второй закон подобия касается положения устойчивых точек. На рисунке 2.30 схематически показана структура решений уравнения (2.41). Рассматриваются точки пересечения с прямой  $x = 0,5$  до ближайшей к ней точки на устойчивом  $2^n$ -цикле. Для соответствующих расстояний  $d_n$  справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -\alpha$$

и вторая константа Фейгенбаума

$$\alpha = 2,5029078750\dots$$

Отметим, что в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения при  $\mu = \mu_\infty$  возникает бесконечное множество (аттрактор Фейгенбаума), который имеет размерность Хаусдорфа  $D = 0,548\dots$ . Важно, что при всех  $\mu < \mu_\infty$  показатель Ляпунова отрицателен, стремясь при  $\mu \rightarrow \mu_\infty$  к нулю. Следовательно, аттрактор Фейгенбаума не является странным.

Хаос возникает при  $\mu > \mu_\infty$ , где показатель Ляпунова в основном положителен. Поведение в этой области достаточно сложное. Хаотические области чередуются с «окнами периодичности» (светлые зоны на рис.2.31).

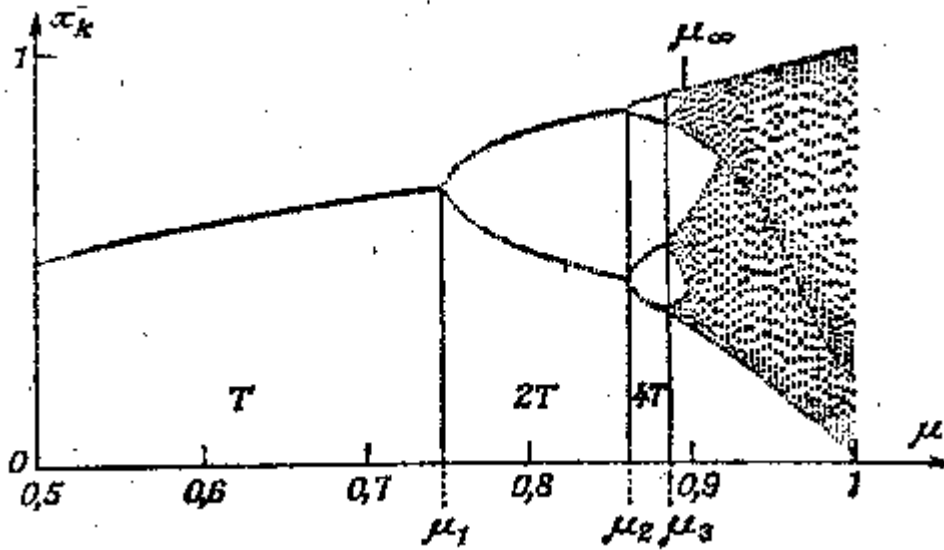


Рис. 2.31.

## 2.8 Некоторые примеры

### 2.8.1 Система Лоренца

Рассмотрим подробно свойства системы Лоренца, полученной ранее в параграфе 1.5 как пример маломодовой модели конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. Имеем систему (1.35)

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Напомним, что управляющим параметром является относительное число Рейнольдса  $r$ , а число Прандтля и параметр  $b$  для определенности во всех случаях, когда будут обсуждаться численные результаты, будем полагать  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ .

Уравнения (2.42) имеют тривиальное решение  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , отвечающее отсутствию конвекции. Проверим это решение на устойчивость. Для этого представим все три переменные в виде

$$X = X_0 + xe^{-\lambda t}, Y = Y_0 + ye^{-\lambda t}, Z = Z_0 + ze^{-\lambda t}, \quad (2.43)$$

считая  $x, y, z$  - малыми возмущениями. (2.43) подставляем в (2.42) и

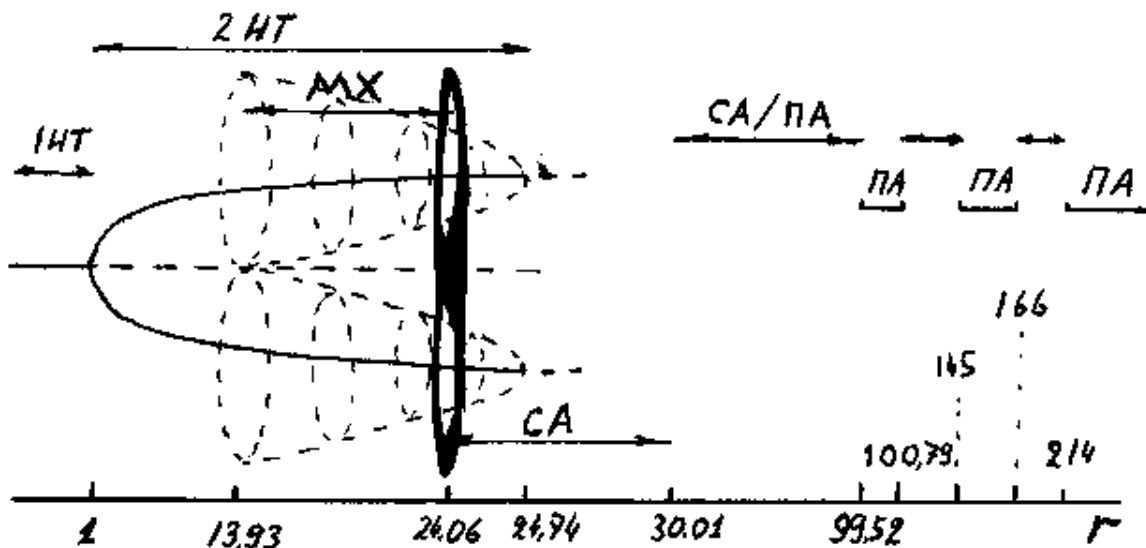


Рис. 2.32.

отбрасываем нелинейные по малым возмущениям члены. В результате, после сокращения на экспоненты, получаем линейную алгебраическую систему

$$\begin{aligned}(\lambda - \sigma)x + \sigma y &= 0, \\ rx + (\lambda - 1)y &= 0, \\ (\lambda + b)z &= 0.\end{aligned}$$

Решая задачу на собственные значения, приравняем нулю определитель системы и получаем

$$\lambda = \frac{\sigma + 1}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)}}{2}.$$

Видно, что при  $r > 1$  один из двух корней становится отрицательным, то есть в точном соответствии с результатом Релея (иначе и быть не может) при  $r = 1$  возникает конвективное движение.

Система (2.42) имеет и нетривиальное решение

$$\begin{aligned}X = Y &= \pm \sqrt{b(r - 1)}, \\ Z &= r - 1.\end{aligned}\tag{2.44}$$

У переменных  $X$  и  $Y$  действительная часть появляется при  $r > 1$ . Таким образом, в точке  $r = 1$  имеет место нормальная бифуркация вилки и появляется два устойчивых решения, соответствующих стационарной валиковой конвекции с противоположным направлением вращения конвективных валов.

Повторяя линейный анализ устойчивости для решения (2.44), приходим к кубическому уравнению

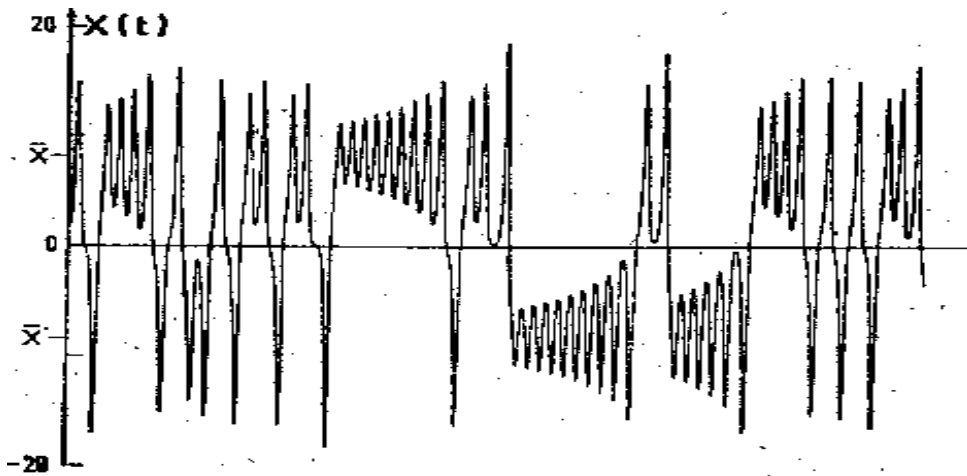
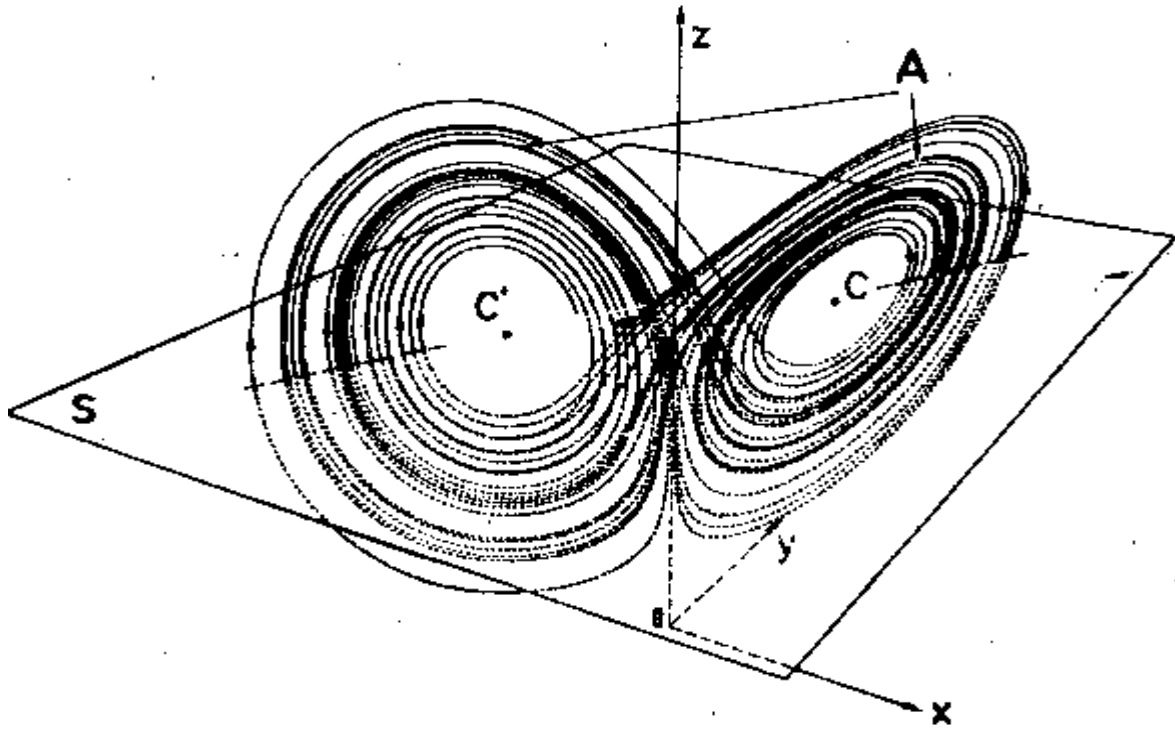


Рис. 2.33.





$$\lambda^3 - (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (r + \sigma)b\lambda - 2\sigma b(r - 1) = 0,$$

в одном из корней которого появляется отрицательная действительная часть при

$$r = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

При  $\sigma = 10, b = 8/3$  это выражение дает значение  $r = 24,74$ . В этой точке имеет место субкритическая бифуркация Хопфа. Особенность поведения системы Лоренца в том, что устойчивый предельный цикл не возникает в ней вовсе (напомним, что согласно сценарию Рюэля-Таккенса, странный аттрактор возникает после двух бифуркаций Хопфа) и странный аттрактор возникает сразу после первой (обратной) бифуркации Хопфа. Бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.32. Следует отметить,

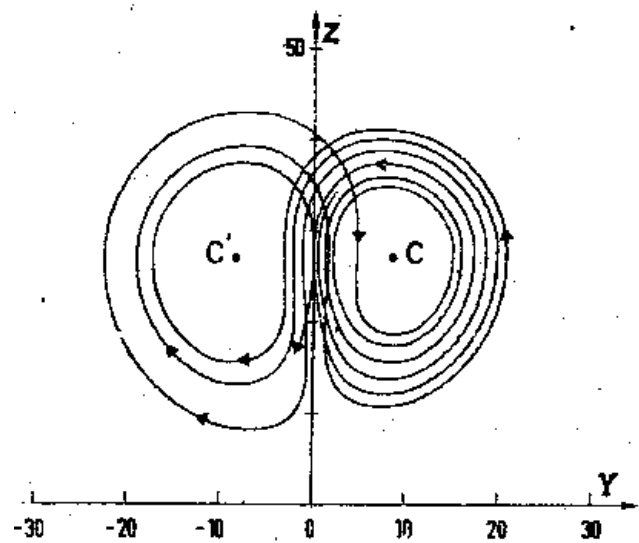


Рис. 2.35..

что «чистый» странный аттрактор существует в небольшом интервале числа Релея  $24,06 < r < 30,1$ . Обратим внимание и на то, что на левом краю этого интервала существует гистерезис - при понижении числа Релея странный аттрактор существует до  $r = 24,06$ , а не до  $r = 24,74$ . Левее этой границы в интервале чисел Релея  $r > 13,93$  существует область так называемого метастабильного хаоса. В этой области малые возмущения стационарного решения монотонно затухают, но большие возмущения приводят к хаотическим режимам, которые в конечном итоге также затухают, но успевают при этом выписать в фазовом пространстве многочисленные хаотические петли, напоминающие поведение системы на странном аттракторе. При  $r > 30,1$  диаграмма режимов представляет собой чередование областей с хаотическим и периодическим движениями, напоминающая поведение отображения Фейгенбаума в области  $\mu_\infty < \mu < 1$  (рис.2.31). Появлению области с периодическим аттрактором предшествует обратный каскад, а само «окно периодичности» включает субгармонический каскад.

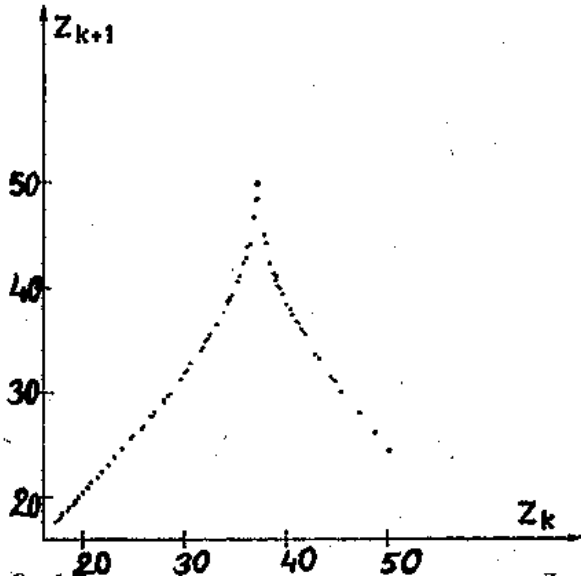


Рис. 2.36.

Число «окон периодичности», по-видимому, бесконечно и при больших числах Релея их ширина растет. Последнее окно неограниченно и занимает всю область  $r > 214,364$ .

В своей знаменитой работе Лоренц численно исследовал поведение системы при  $r = 28$ . На рисунке 2.33 показан фрагмент поведения во времени переменной  $X(t)$  при этом значении  $r$ , а на рис.2.34 - характерный вид фазовой траектории системы на странном аттракторе. На рис.2.35 - проекции фазовой траектории на плоскости  $(X, Z)$ . Наблюдение за эволюцией фазовой траектории показывает, что траектория описывает витки вокруг точек, соответствующих ставшим неустойчивыми решениям (2.44), переходя случайным образом от вращения вокруг одного фокуса к вращению вокруг другого.

Наблюдая за эволюцией фазовой траектории в плоскости  $(X, Z)$ , Лоренц сделал важный вывод. Траектория раскручивается вокруг одного фокуса, увеличивая на каждом витке радиус орбиты. Этот процесс происхо-

стабильного хаоса. В этой области малые возмущения стационарного решения монотонно затухают, но большие возмущения приводят к хаотическим режимам, которые в конечном итоге также затухают, но успевают при этом выписать в фазовом пространстве многочисленные хаотические петли, напоминающие поведение системы на странном аттракторе. При  $r > 30,1$  диаграмма режимов представляет собой чередование областей с хаотическим и периодическим движениями, напоминающая поведение отображения Фейгенбаума в области  $\mu_\infty < \mu < 1$  (рис.2.31). Появлению области с периодическим аттрактором предшествует обратный

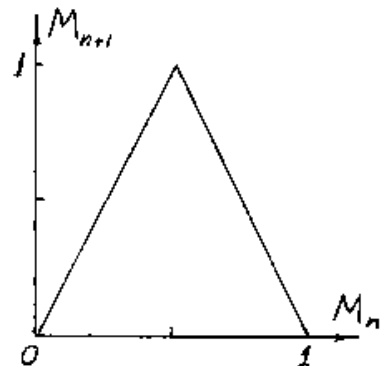


Рис. 2.37.

дит до тех пор, пока на очередном витке в точке максимума траектория не выйдет за значение  $Z = 38,5$ . Как только траектория превысит это значение, она уходит в область притяжения другого фокуса и все повторяется вновь. При этом число витков, которое совершит траектория, зависит от величины превышения траектории над этим критическим значением перед перебросом. Лоренц использовал метод точечных отображений, позволяющий перейти от системы с непрерывным временем к системе с дискретным временем - вариант сечения Пуанкаре, называемый отображением первого возвращения. В качестве отображения использовалось значение величины  $Z$  в текущем локальном максимуме, как функция от значения в предыдущем максимуме (рис.2.36). Левая, восходящая часть функции соответствует процессу раскручивания, а переход за пик - перебросу к другому фокусу. Лоренц предложил простейшую модель наблюдаемого процесса - отображение отрезка  $[0,1]$  на себя вида (рис.37)

$$M_{n+1} = \begin{cases} 2M_n & M_n < \frac{1}{2} \\ 2(1 - M_n) & M_n > \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.45)$$

Если рассматривается последовательность, начинающаяся со значения  $M_0$ , то она будет развиваться по следующей цепочке:

$$M_1 = \begin{cases} 2M_0 \\ 2 - 2M_0 \end{cases} \quad M_2 = \begin{cases} 4M_0 \\ 2 - 4M_0 \\ 4 - 4M_0 \\ -2 + 4M_0 \end{cases} \quad M_3 = \begin{cases} 8M_0 \\ 2 - 8M_0 \\ 4 - 8M_0 \\ 6 - 8M_0 \\ 8 - 8M_0 \\ -2 + 8M_0 \\ -4 + 8M_0 \\ -6 + 8M_0 \end{cases} \quad \dots \quad M_n = m_n \pm 2^n M_0.$$

Здесь  $m_n$  - четное число, такое, что оно сдвигает величину  $2^n M_0$  в интервал  $[0,1]$ . Все возможные последовательности можно разделить на три типа:

Последовательности, заканчивающиеся в нуле. Таких последовательностей счетное множество и они начинаются с элемента вида  $M_0 = u/2^p$ , где  $u$  - нечетное целое число. Тогда  $M_{p-1} = 1/2$  и  $M_p = 0$ .

Периодические последовательности. Они возникают, если  $M_0 = u/2^p v$ , где  $u, v$  - простые числа. Тогда  $M_{p+1+k} = m \pm \frac{2^{p+1+k} u}{2^p v} = m \pm \frac{2 \cdot 2^k u}{v}$ . Простейшие примеры получающихся периодических последовательностей есть

[2/3, ].....

[2/5, 4/5, ].....

[2/7, 4/7, 6/7, ].....

[2/9, 4/9, 8/9, ]....

### 3) Аперриодические последовательности.

Эта модель иллюстрирует еще одно важное свойство системы - неустойчивость к малым возмущениям (ЧЗНУ). Действительно, если рассмотреть последовательность с малым возмущением начального элемента  $M'_0 = M_0 + \varepsilon$ , то после  $n$  итераций

$$M'_n = m_n \pm 2^n (M_0 \pm \varepsilon) = M_n \pm 2^n \varepsilon,$$

что свидетельствует об экспоненциальном росте возмущений.

Отметим, что модельное отображение (2.45) при всей своей простоте сохраняет важнейшее свойство, приводящее к ЧЗНУ в диссипативных системах - это растяжение в сочетании со складыванием. Растяжение на каждом шаге приводит к экспоненциальному росту начального смещения (расхождению траекторий), а складывание обеспечивает возвращение в ограниченную область (в данном случае интервал).

#### 2.8.2 Модель динамо Рикитаке

Другой пример динамической системы со стохастическим поведением дает так называемая модель двухдискового динамо Рикитаке, предложенная в связи с задачей об инверсиях геомагнитного поля. Магнитное поле Земли в первом приближении представляет собой диполь, который по палеомагнитным данным многократ-

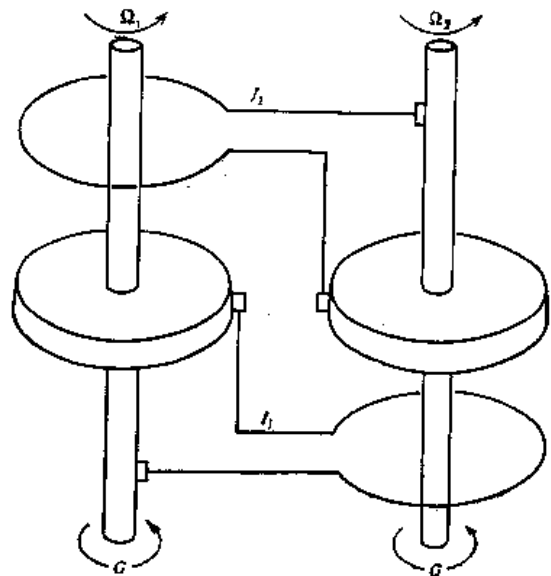


Рис. 2.38.

но и нерегулярно менял свою полярность. На сегодняшний день шкала полярности геомагнитного поля восстановлена более чем за 1700 миллионов лет, что составляет порядка половины возраста Земли. За это время зарегистрировано 593 переброса магнитного поля, причем время между двумя перебросами колеблется в интервале от 10 тысяч до сотен миллионов лет, демонстрируя хаотическое поведение, лишённое каких-либо периодичностей.

Согласно принятой на сегодня точке зрения, магнитное поле Земли возбуждается в результате конвективного движения в жидком (электропроводящем) ядре. Процесс возбуждения магнитного поля в движущейся проводящей среде получил название МГД-динамо. Земное динамо представляет собой сложный нелинейный магнитогидродинамический процесс, исследование которого находится лишь на начальной стадии. Большой интерес представляют поэтому любые упрощенные модели процесса генерации магнитного поля, способные приводить к случайным сменам полярности генерируемого магнитного поля.

Самые простые модели оперируют не потоками проводящей жидкости, а движущимися проводниками. Первая попытка построить такого рода модель принадлежит Булларду (Bullard E.C., Proc.Cambridge Philos. Soc., 1955, v.51, p.744.), который предложил однодисковое динамо, но такая модель не дает смены полярности генерируемого поля. Рикитакэ (Rikitake T., Proc.Cambridge Philos. Soc., 1958, v.54, p.89.) рассмотрел систему двух дисковых динамо, связанных таким образом, что ток от одного диска питает катушку возбуждения другого и наоборот. Эта ситуация изображена на рис.2.38. Оба диска вращаются без трения и находятся под действием одинаковых моментов сил  $G$ , компенсирующих омические потери в дисках и обмотках. Уравнения, описывающие эволюцию токов  $I_1, I_2$  и угловых скоростей  $\Omega_1, \Omega_2$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} L\dot{I}_1 + RI_1 &= M\Omega_1 I_2, \\ L\dot{I}_2 + RI_2 &= M\Omega_2 I_1, \\ C\dot{\Omega}_1 &= G - MI_1 I_2, \\ C\dot{\Omega}_2 &= G - MI_1 I_2, \end{aligned} \tag{2.46}$$

где  $L$  - коэффициент самоиндукции,  $R$  - сопротивление каждой цепи,  $M$  - коэффициент взаимной индукции,  $C$  - момент инерции диска.

Два последних уравнения (2.46) показывают, что разность угловых скоростей есть величина постоянная

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \sqrt{\frac{GL}{CM}} A,$$

где  $A$  - константа. Это позволяет перейти к системе трех уравнений.

Система записывается в безразмерном виде. При этом за единицу тока принимают величину  $\sqrt{G/M}$ , угловой скорости -  $\sqrt{GL/CM}$ , а за единицу времени - величину  $\sqrt{\tau_e \tau_m}$ . Единица времени выражена через два характерных масштаба времени, присущих системе. Это время  $\tau_m$ , за которое диск под действием приложенного момента сил разгоняется до характерной скорости  $R/M$ ,

$$\tau_m = \frac{CR}{GM}$$

и время электромагнитной диффузии

$$\tau_e = \frac{L}{R},$$

характеризующее время вырождения магнитного поля при остановке диска. Их отношение является безразмерным параметром системы

$$\mu = \frac{\tau_m}{\tau_e} = \frac{CR^2}{GLM}.$$

Обозначая безразмерные токи как  $X_i$ , а безразмерные угловые скорости как  $Y_i$  (в уравнениях остается одна переменная  $Y$ , так как  $Y_1 - Y_2 = A$ ), прихо-

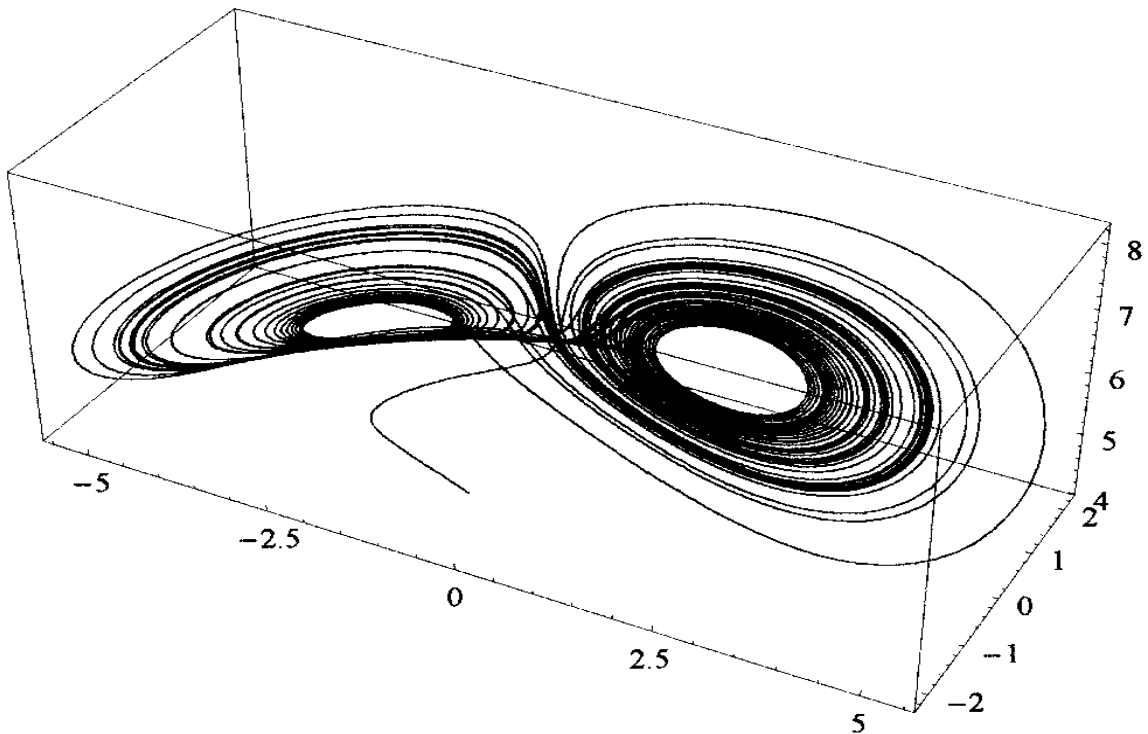


Рис. 2.39.

дим к системе

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 + \mu X_1 &= Y X_2, \\ \dot{X}_2 + \mu X_2 &= (Y - A) X_1, \\ \dot{Y} &= 1 - X_1 X_2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Система (2.47) имеет стационарные решения

$$X_1 = \pm K, \quad X_2 = \pm K^{-1}, \quad Y = Y_1 = \mu K^2, \quad Y_2 = \mu K^{-2},$$

где  $A = \mu(K^2 - K^{-2})$ .

Мы не будем подробно описывать свойства системы Рикитаке, оставляя ее изучение для самостоятельных работ. На рис.2.39 показана только фазовая траектория системы для случая  $\mu = 1,5$ ;  $K = 2$ . Можно видеть, что ее топология близка аттрактору Лоренца.

### 2.8.3 Реальная конвекция

Наибольшее число экспериментальных работ по исследованию перехода от упорядоченных течений к хаотическим выполнено, пожалуй, в исследованиях конвективных течений. Мы приведем некоторые результаты исследований перехода от ламинарного движения к турбулентности при конвекции в кубической полости, взятые из работы: Зимин В.Д., Кетов А.И. Надкритические конвективные движения в кубической полости. Изв.АН СССР, Механика жидкости и газа, 1974, N.5, С.110.

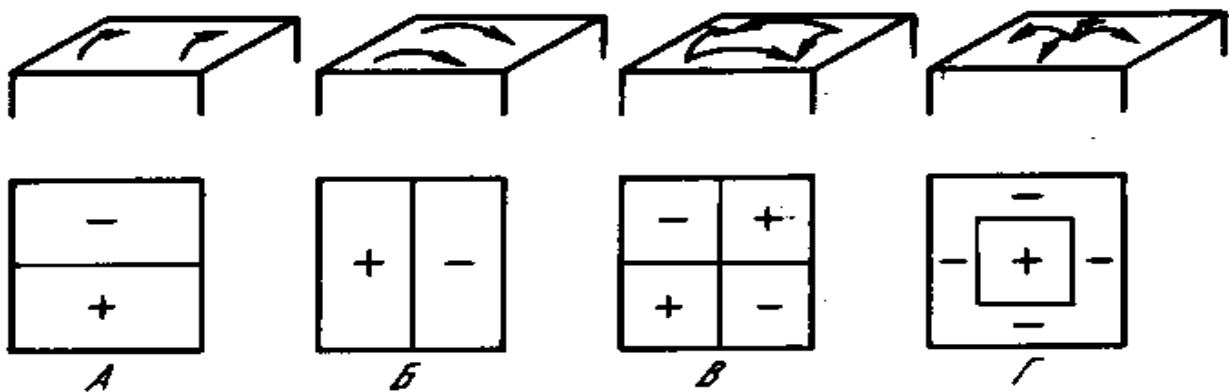


Рис. 2.40.

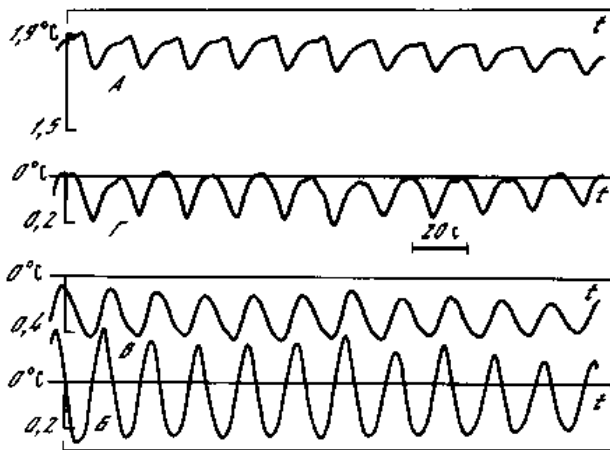


Рис. 2.41.

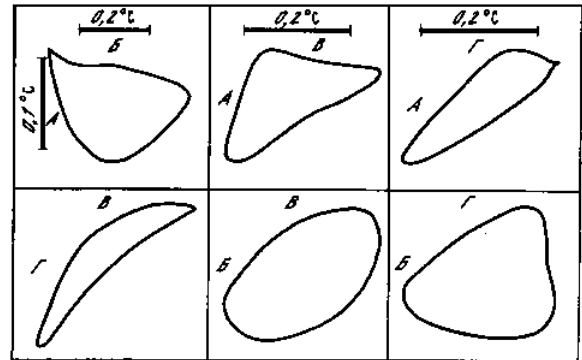


Рис. 2.42.

Измерения проводились подогреваемой снизу в кубической полости с ребром 40 мм, образованной медными стенками. Горизонтальные стенки термостатировались, обеспечивая заданную разность температуры, а вертикальные обеспечивали равновесный однородный градиент температуры. Надкритические течения, возникающие в кубической полости и имеющие наиболее низкие уровни устойчивости, схематически показаны на рис.2.40, где стрелками показано направление движения жидкости в верхней части

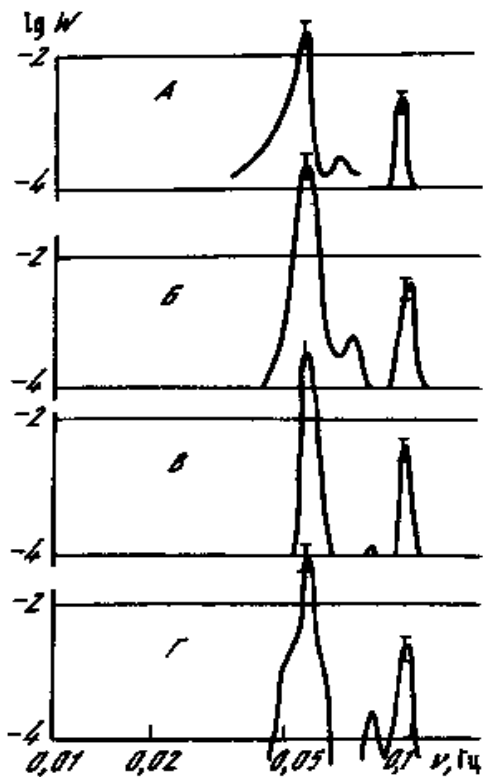


Рис. 2.43.

полости, а знаками «плюс» и «минус» обозначены области, в которых температура оказывается выше или ниже средней. Критические числа Релея для движений типа А и Б равны 8224, для В - 9184 и для Г - 14032. В полости были установлены дифференциальные термопары, расположенные таким образом, что их показания позволяли выделять движения всех четырех типов.

Не останавливаясь на сценариях развития неустойчивости и переходов от одного режима движения к другому, приведем лишь некоторые данные, иллюстрирующие поведение системы в одночастотном режиме, двухчастотном и стохастическом режимах. Для каждого из трех режимов на рисунках представлены изменения во времени показаний термопар, соответствующих каждому из выделяемых течений, проекции фазовых траекторий на



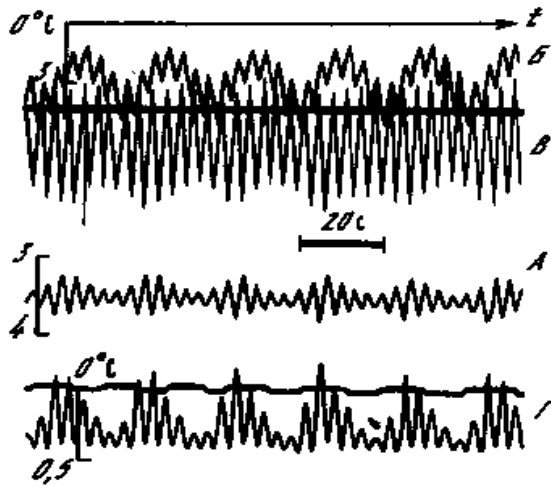


Рис. 2.44.

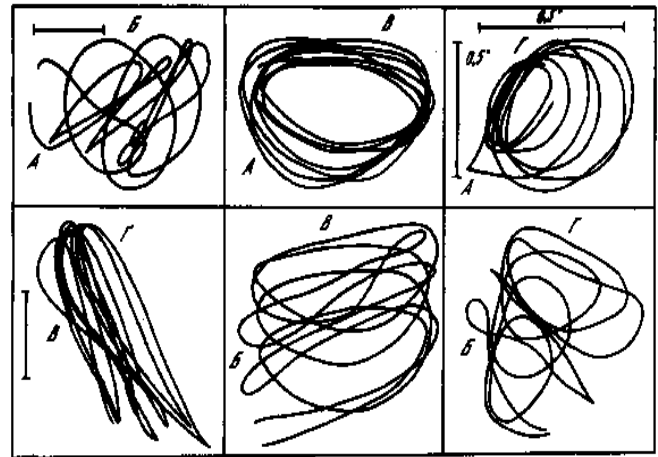


Рис. 2.45.

плоскости, образованные всеми парами термопар и спектры мощности пульсаций температуры, регистрируемой каждой из четырех термопар.

Рисунки 2.41-2.43 относятся к одночастотному режиму, регистрируемому при числе Рейля  $R = 2 \cdot 10^5$ . Первый рисунок показывает характер колебаний показаний всех четырех термопар, второй - соответствующие этим колебаниям проекции фазовых траекторий, ясно указывающие на существование предельного цикла. Об этом же свидетельствуют и спектры Фурье (рис.2.43) состоящих их одного главного пика на частоте 0,054 Гц и пика на удвоенной частоте, обусловленный негармонической формой колебаний.

Следующая группа рисунков представляет результаты для числа Рейля  $R = 2,24 \cdot 10^5$ . На рисунке 2.44 показаны пульсации показаний термопар, на рис.2.45 - соответствующие фазовые траектории (за время соответствующее периоду низкочастотных колебаний), а на рисунке 2.46 - спектры, свидетельствующие о существовании двухчастотного режима (частоты 0,0451 Гц и 0,304 Гц).

Движение становится стохастическим при  $R = 2,50 \cdot 10^5$ . Показания термопар для этого режима представлены на рис.2.47, фазовые траектории -

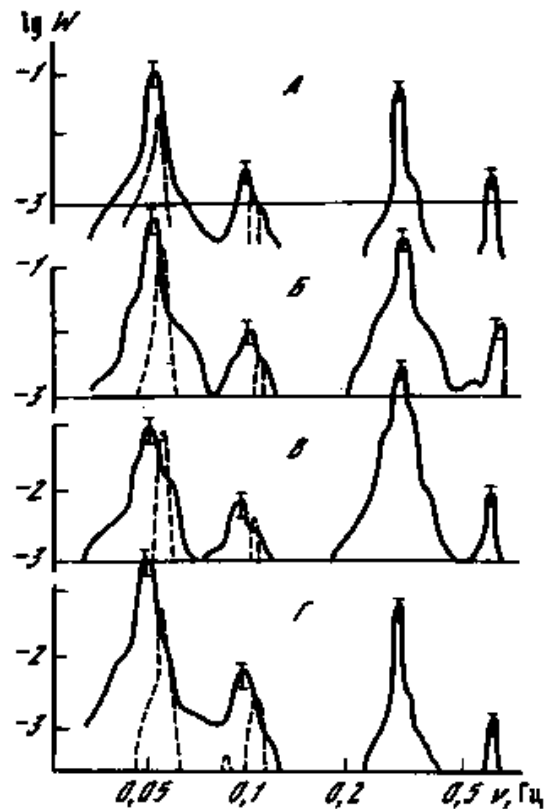


Рис. 2.46.

на рис.2.48, а спектры мощности - на рис.2.49. Видно, что фазовые траектории имеют чрезвычайно запутанную структуру, а спектры становятся сплошными, сохраняя лишь слабые локальные максимумы, свидетельствующие о сохранении периодических составляющих.

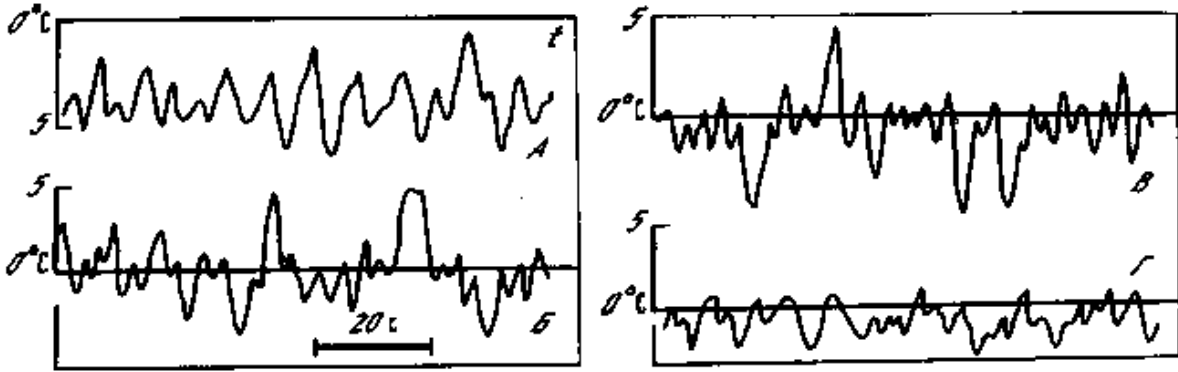


Рис. 2.47.

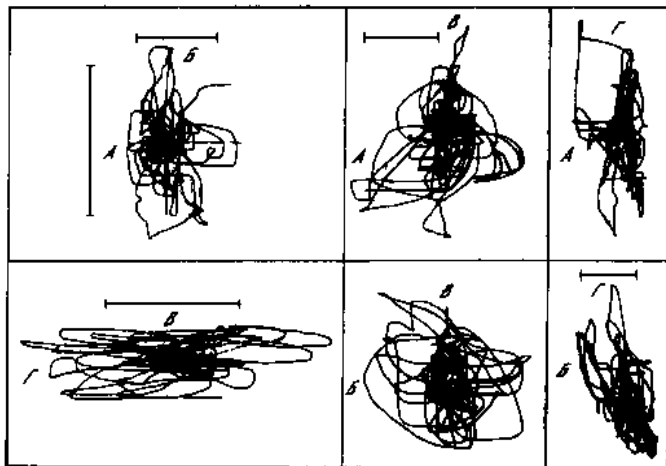


Рис. 2.48.

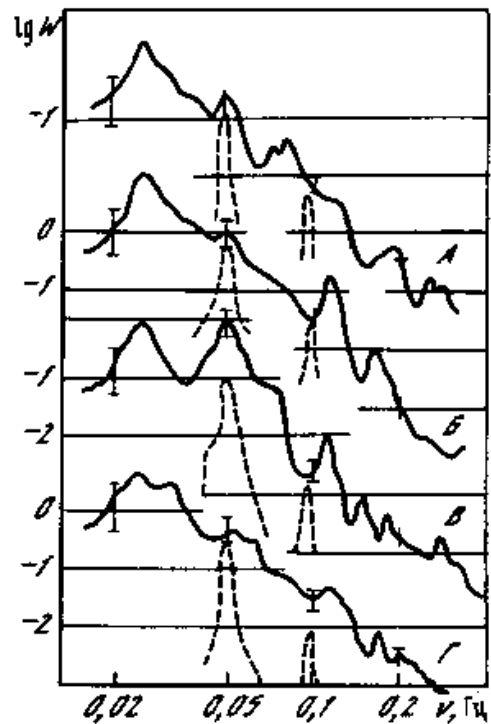


Рис. 2.49.

Рекомендуемая литература ко второй главе:

1. Берже П., Помо И., Видаль Л. Порядок в хаосе. Москва: Мир. 1991. 366с.
2. Шустер Г. Детерминированный хаос. Москва: Мир. 1988. 240с.
3. Странные аттракторы. Сборник статей. Серия «Математика. Новое в зарубежной науке», выпуск 22. Москва: Мир. 1981. 254с.

## 3 ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

### 3.1 Развитая турбулентность

#### 3.1.1 Вводные замечания

В данной главе мы начинаем рассматривать подходы к описанию развитой турбулентности, то есть течений, возникающих при значительном превышении критических значений управляющих параметров (числа Рейнольдса, если речь идет об изотермическом течении в отсутствии дополнительных силовых полей). Такие течения характеризуются наполненными спектрами Фурье, причем не только временными, но и пространственными. Напомним еще раз, что именно в этом и есть основное отличие турбулентности от хаоса в динамических системах невысокого порядка: в турбулентном потоке хаос и пространственный, и временной, а хаотическое поведение маломодовых систем (соответствующих например конвективным течениям при невысокой надкритичности) представляет собой хаотическую во времени эволюцию мод с относительно простой пространственной структурой.

Приступая к рассмотрению развитых турбулентных течений, следует сделать ряд важных замечаний. Первое из них касается уравнений движения жидкости. В первой главе мы получили уравнения Навье-Стокса, как основные уравнения, с помощью которых мы описываем в дальнейшем все течения жидкости. Снова подчеркнем, что мы действительно продолжаем считать, что эти уравнения описывают течения жидкости и в турбулентном режиме, даже при экстремально больших значениях безразмерных параметров (более того, мы будем рассматривать только случай несжимаемой жидкости). Уверенность в том, что это возможно, держится на результатах многочисленных успешных попыток использования этих уравнений для турбулентных течений. Сама возможность приложения уравнений Навье-Стокса к турбулентности совсем не очевидна (и продолжает подвергаться критике), так как при их выводе было сделано достаточно сильное предположение о том, что тензор вязких напряжений включает в себя только линейные комбинации первых производных поля скорости. В ламинарных и слабо надкритических течениях это предположение кажется разумным и прекрасно работает, но в сильно нелинейных режимах нельзя исключить, что тензор вязких напряжений будет иметь более сложную зависимость от структуры поля скорости. Оправданием использованию уравнений движения в принятой форме может служить только сопоставление результатов их решения с экспериментальными данными.

Далее, пусть уравнения движения справедливы и предположим, что мы располагаем мощнейшим компьютером, способным решать трехмерные уравнения движения с любой желаемой точностью (например, будем считать трехмерный поток на сетке  $1000 \times 1000 \times 1000$ ). Это, однако, не снимает проблемы описания турбулентности, так как в результате такого решения мы будем иметь огромное количество информации, осознание которой требует ее представления в некотором виде, а это фактически опять же предполагает введение определенной модели процесса. По сути, такой суперкомпьютер отличается от реального турбулентного течения, наблюдаемого в лаборатории или природе, только несравненно большими возможностями съема информации относительно состояния потока в любой точке и в любой момент времени.

Проблема описания турбулентного движения состоит в выделении характеристик, описывающих свойства системы с огромным числом степеней свободы, а любой подход к ее описанию - это тот или иной способ ограничения числа степеней свободы.

Турбулентные поля (скорость, давление, температура и т.д.) представляют собой случайные поля. В любой точке потока можно установить датчик и зарегистрировать реализацию процесса в данной точке. Многократно повторяя эту процедуру, принципиально возможно получить плотность вероятности  $P(f)$  для интересующей нас величины  $f(\vec{r}, t)$ . В общем случае, плотность вероятности также есть функция координат и времени. Существует ряд важных частных случаев, которые мы и перечислим.

Турбулентность является однородной, если плотность распределения вероятности не зависит от сдвига

$$P(t, \vec{r} + \Delta\vec{r}) = P(t, \vec{r}).$$

Турбулентное течение называется стационарным, если плотность вероятности не зависит от времени, то есть

$$P(t + \tau, \vec{r}) = P(t, \vec{r}).$$

Процесс называется эргодическим, если осреднение по времени эквивалентно для него осреднению по ансамблю реализаций

$$\langle f(\vec{r}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, \vec{r}) dt.$$

Угловыми скобками будем обозначать среднее по ансамблю реализаций. Очевидно, что только стационарный процесс может быть эргодическим. Гипотеза эргодичности широко используется при исследовании ста-

ционарных течений, так как на практике измеряются именно средние по времени величины.

В реальных измерениях широко используется и гипотеза Тейлора, позволяющая связать пространственные и временные флуктуации исследуемой величины  $f(\vec{r}, t)$ . Согласно этой гипотезе, если существует среднее течение, характеризуемой скоростью  $\vec{U}$ , то справедливо соотношение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = U_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Пользуясь этой гипотезой, по измерениям в заданной точке пространства определяют пространственные флуктуации исследуемого поля и их статистические характеристики.

### 3.1.2 Статистические моменты случайных полей

Функция распределения плотности вероятности  $P(\vec{r}, t)$  содержит полную информацию о случайном поле  $f(\vec{r}, t)$ , однако, ее определение в полном объеме практически невозможно. Известно, что заданию плотности вероятности эквивалентно задание последовательности (в принципе - бесконечной) статистических моментов

$$Mf^m = \int f^m P(f) df.$$

При этом момент нулевого порядка равен единице в силу условия нормировки

$$Mf^0 = \int P(f) df = 1,$$

а момент первого порядка, называемый также математическим ожиданием, дает среднее значение величины

$$Mf^1 = \int f P(f) df = \langle f \rangle.$$

Для моментов второго и более высоких порядков обычно используют центральные моменты, вычисляемые относительно средних значений

$$M(f - \langle f \rangle)^m = \int (f - \langle f \rangle)^m P(f) df.$$

Напомним, что центральный момент второго порядка называется дисперсией.

С точки зрения описания турбулентных полей, необходимы статистические характеристики связи между значениями величины  $f(\vec{r}, t)$  в различных точках пространства. Это требует введения совместной плотности ве-

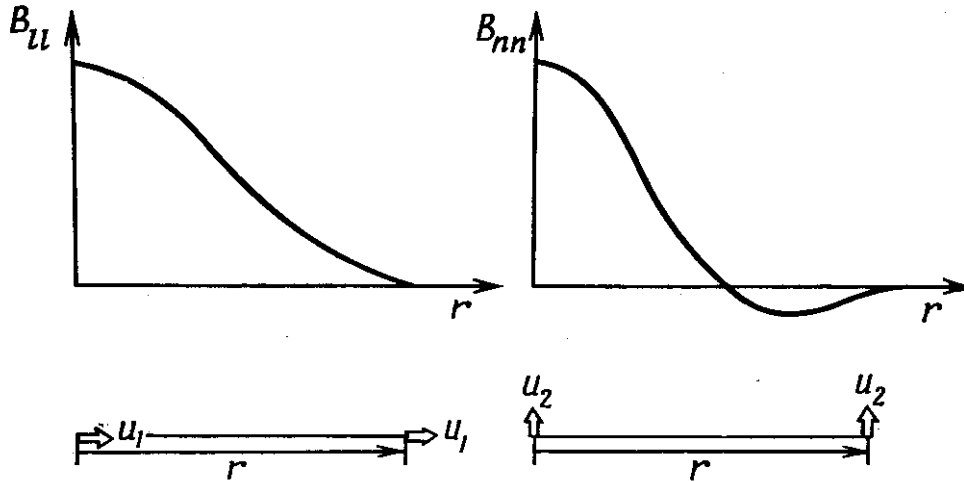


Рис.3.1.

роятности  $P(f(\vec{r}_1), f(\vec{r}_2))$  и (или) соответствующих двухточечных моментов. Важнейшим среди двухточечных моментов является момент второго порядка, называемый корреляционной функцией

$$B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int (f(\vec{r}_1) - \langle f_1 \rangle)(f(\vec{r}_2) - \langle f_2 \rangle) P(f(\vec{r}_1), f(\vec{r}_2)) df_1 df_2 = \langle (f_1 - \langle f_1 \rangle)(f_2 - \langle f_2 \rangle) \rangle. \quad (3.1)$$

Если речь идет о векторном поле (например, скорости), то появляется корреляционный тензор

$$B_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \langle (v_i(\vec{r}_1) - \langle v_i(\vec{r}_1) \rangle)(v_j(\vec{r}_2) - \langle v_j(\vec{r}_2) \rangle) \rangle. \quad (3.2)$$

Для однородной турбулентности (3.1) и (3.2) зависят только от взаимного расположения двух точек, то есть, если  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{r}$ , то

$$B_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = B_{ij}(\vec{r}). \quad (3.3)$$

Важным частным случаем является однородная и изотропная турбулентность, в которой совместная плотность вероятности (а, следовательно, и двухточечные моменты) не зависят и от направления вектора  $\vec{r}$ . Тогда

$$B_{ij}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = B_{ij}(|\vec{r}|) = B_{ij}(r). \quad (3.4)$$

Чаще всего используют корреляционные функции  $B_l(r)$  и  $B_m(r)$ , характеризующие корреляцию продольных и поперечных составляющих пульсаций скорости. Здесь индексом  $l$  обозначена составляющая скорости вдоль линии, соединяющей точки  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , а индексом  $n$  составляющая, нормальная этой линии. Характерный вид этих функций иллюстрирует рисунок 3.1.

Выше, в параграфе 2.4.3, указывалось на связь корреляционной функции со спектрами (теорема Хинчина) в случае временного сигнала. Аналогичное соотношение связывает и пространственные спектры с двухточечными корреляционными функциями. Прежде чем написать это соотношение, остановимся несколько подробнее на вопросе о пространственных спектрах турбулентности.

### 3.1.3 Пространственные спектры

Предположим, что рассматриваемое случайное (турбулентное) поле занимает ограниченный объем и величина  $f(x, y, z, t)$  может быть представлена интегралом Фурье

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad (3.5)$$

где

$$\hat{f}(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad (3.6)$$

$\vec{r} = (x, y, z)$  - радиус-вектор,  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$  - волновой вектор.

Считая рассматриваемую турбулентность стационарной, определим трехмерный энергетический спектр случайного поля :

$$F(\vec{k}) = \langle |\hat{f}(\vec{k})|^2 \rangle \quad (3.7)$$

Угловые скобки означают в этом случае осреднение по времени. Трехмерный спектр связан с корреляционной функцией  $B(\vec{r})$  (теорема Хинчина)

$$F(\vec{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int B(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.8)$$

В теории турбулентности, говоря о ее спектральных свойствах, обычно имеют в виду энергетический спектр  $E(k)$ , который характеризует энергию



всех гармоник с заданным модулем волнового вектора, независимо от его направления.

$$E(k) = \int_{|\vec{k}|} F(\vec{k}) d\vec{k}, \quad (3.9)$$

или, в сферической системе координат,

$$E(k) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\vec{k}) k^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

В важном частном случае изотропной турбулентности, когда  $F(\vec{k}) = F(k)$ , связь становится очень простой:

$$E(k) = 4\pi k^2 F(k). \quad (3.10)$$

Отметим, что все оценки для спектральных законов развитой турбулентности касаются обычно именно энергетического спектра  $E(k)$ .

Если в турбулентном потоке измерения проводятся вдоль одной прямой, то по этим измерениям можно построить одномерное фурье-преобразование. Ограничиваясь однородной и изотропной турбулентностью, в которой все прямые равноправны, рассмотрим прямую  $y = z = 0$  и запишем

$$\widehat{f}_1(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-ik_x x} dx.$$

Квадрат модуля этой величины есть одномерный энергетический спектр

$$F_1(k_x) = |\widehat{f}_1(k_x)|^2. \quad (3.11)$$

Чтобы получить связь между одномерным и трехмерным спектрами, выразим исходную величину на прямой  $y = z = 0$  через обратное преобразование Фурье. С одной стороны

$$f(x, 0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{f}_1(k_x) e^{ik_x x} dk_x,$$

а с другой стороны

$$\begin{aligned} f(x, 0, 0) &= \frac{1}{8\pi^3} \int \widehat{f}(k_x, k_y, k_z) e^{i(xk_x + 0k_y + 0k_z)} dk_x dk_y dk_z = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left( \frac{1}{4\pi^2} \int \widehat{f}(\vec{k}) dk_y dk_z \right) e^{ik_x x} dk_x. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widehat{f}_1(k_x) = \frac{1}{4\pi^2} \int \widehat{f}(\vec{k}) dk_y dk_z,$$

а

$$F_1(k_x) = \frac{1}{16\pi^4} \int F(\vec{k}) dk_y dk_z.$$

В следующих главах, рассматривая структуру мелкомасштабной турбулентности, мы постоянно будем обращаться к спектрам, описываемым степенными законами. Покажем, как связаны между собой введенные спектры турбулентности при степенной зависимости энергии от масштаба (волнового числа). Пусть имеется однородное изотропное поле скалярной величины, энергетический спектр которой следует степенному закону

$$E(k) \sim k^\alpha.$$

Тогда трехмерный спектр

$$F(k) \sim k^{\alpha-2} = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{\alpha-2}{2}},$$

а одномерный

$$\begin{aligned} F_1(k_x) &\sim \iint (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} dk_y dk_z = \\ &= k_x^{\alpha-2} \iint \left( 1 + \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^2 + \left( \frac{k_z}{k_x} \right)^2 \right)^{\frac{\alpha-2}{2}} dk_y dk_z = \\ &= k_x^\alpha \iint (1 + \eta^2 + \xi^2)^{\frac{\alpha-2}{2}} d\eta d\xi \sim k_x^\alpha \end{aligned}$$

(проведена замена переменных  $\eta = k_y / k_x$ ;  $\xi = k_z / k_x$ ).

Таким образом, в однородной изотропной турбулентности энергетический спектр  $E(k)$  и одномерный спектр  $F_1(k)$  следуют одному степенному закону, а степень убывания трехмерного спектра меньше на двойку (т.е. трехмерный спектр значительно круче).

## 3.2 Уравнения для статистических моментов

### 3.2.1 Уравнение Рейнольдса

Рассмотрим уравнения Навье-Стокса в тензорных обозначениях

$$\partial_i v_i + v_j \partial_j v_i = -\rho^{-1} \partial_i p + \nu \partial_{jj}^2 v_i + f_i, \quad (3.12)$$

$$\partial_k v_k = 0. \quad (3.13)$$

Входящие в них величины представим в виде сумм средних полей и пульсаций:

$$v_i(\vec{r}, t) = U_i(\vec{r}, t) + u_i(\vec{r}, t), \quad p(\vec{r}, t) = P(\vec{r}, t) + p'(\vec{r}, t) \quad (3.14)$$

При этом, согласно принятым определениям, предполагаются следующие правила осреднения (угловые скобки по-прежнему обозначают осреднение по ансамблю реализаций):

$$\langle v_i \rangle = U_i, \quad \langle U_i \rangle = U_i, \quad \langle u_i \rangle = 0; \quad (3.15)$$

$$\langle p \rangle = P, \quad \langle P \rangle = P, \quad \langle p' \rangle = 0; \quad (3.16)$$

Разложения (3.14) подставим в исходные уравнения (3.12)-(3.13):

$$\partial_i U_i + \partial_i u_i + U_j \partial_j U_i + U_j \partial_j u_i + u_j \partial_j U_i + u_j \partial_j u_i = -\rho^{-1} (\partial_i P + \partial_i p') + \nu (\partial_{jj}^2 U_i + \partial_{jj}^2 u_i) + f_i \quad (3.17)$$

$$\partial_k U_k + \partial_k u_k = 0, \quad (3.18)$$

и проведем осреднение

$$\begin{aligned} \partial_i U_i + \partial_i \langle u_i \rangle + U_j \partial_j U_i + U_j \partial_j \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j U_i + \langle u_j \partial_j u_i \rangle = \\ -\rho^{-1} (\partial_i P + \partial_i \langle p' \rangle) + \nu (\partial_{jj}^2 U_i + \partial_{jj}^2 \langle u_i \rangle) + \langle f_i \rangle \\ \partial_k U_k + \partial_k \langle u_k \rangle = 0. \end{aligned}$$

Учитывая правила осреднения (3.15)-(3.16), приходим к уравнению Рейнольдса:

$$\partial_i U_i + U_j \partial_j U_i = -\rho^{-1} \partial_i P + \nu \partial_{jj}^2 U_i - \partial_j \langle u_j u_i \rangle + \langle f_i \rangle, \quad (3.19)$$

и уравнению неразрывности для среднего поля скорости

$$\partial_k U_k = 0. \quad (3.20)$$

В уравнение Рейнольдса для средних полей входит одноточечный корреляционный тензор пульсаций скорости, называемый тензором напряжений Рейнольдса

$$\tau_{ij} = \langle u_i u_j \rangle. \quad (3.21)$$

Этот тензор нельзя выразить через осредненные характеристики турбулентных полей. Следовательно, число неизвестных превышает число имеющихся уравнений и система (3.19)-(3.20) является не замкнутой.

### 3.2.2 Цепочка уравнений Фридмана-Келлера и проблема замыкания

В уравнении Рейнольдса появилась новая неизвестная величина - тензор напряжений Рейнольдса (3.21), для которого также можно получить эволюционное уравнение. Так как

$$\partial_i \tau_{ij} = \partial_i \langle u_i u_j \rangle = \langle u_i \partial_i u_j \rangle + \langle u_j \partial_i u_i \rangle,$$

то сначала требуется получить уравнение для пульсаций скорости, для чего из уравнения (3.17) необходимо вычесть уравнение (3.19). Получим (немые индексы  $j$  заменены на  $k$ )

$$\partial_i u_i + U_k \partial_k u_i + u_k \partial_k U_i + u_k \partial_k u_i = -\rho^{-1} \partial_i p' - \partial_k \langle u_i u_k \rangle + \nu \partial_{kk}^2 u_i + f'_i. \quad (3.22)$$

Аналогичное уравнение получается и для компоненты  $u_j$ :

$$\partial_i u_j + U_k \partial_k u_j + u_k \partial_k U_j + u_k \partial_k u_j = -\rho^{-1} \partial_j p' - \partial_k \langle u_j u_k \rangle + \nu \partial_{kk}^2 u_j + f'_j. \quad (3.23)$$

Уравнение (3.22) умножается на  $u_j$  и складывается с уравнением (3.23), умноженным на  $u_i$ :

$$\begin{aligned} & u_i \partial_i u_j + u_j \partial_i u_i = \\ & -U_k \partial_k (u_i u_j) - u_j u_k \partial_k U_i - u_i u_k \partial_k U_j - u_j \partial_k (u_i u_k) - u_i \partial_k (u_j u_k) - u_i \partial_k \langle u_j u_k \rangle - u_j \partial_k \langle u_i u_k \rangle \\ & - \rho^{-1} (u_i \partial_j p' + u_i \partial_j p') - \nu (u_i \partial_{kk}^2 u_j + u_j \partial_{kk}^2 u_i) + u_i f'_j + u_j f'_i \end{aligned}$$

После осреднения приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \partial_i \langle u_j u_j \rangle + U_k \partial_k \langle u_i u_j \rangle = & -(\langle u_i u_k \rangle \partial_k U_j + \langle u_j u_k \rangle \partial_k U_i) - \partial_k \langle u_i u_j u_k \rangle \\ & - \rho^{-1} (\langle u_i \partial_j p' \rangle + \langle u_j \partial_i p' \rangle) - \nu (\langle u_i \partial_{kk}^2 u_j \rangle + \langle u_j \partial_{kk}^2 u_i \rangle) + \langle u_i f_j' \rangle + \langle u_j f_i' \rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

В уравнении для корреляционного тензора пульсаций скорости второго порядка (3.24) появился корреляционный тензор (момент) третьего порядка  $\langle u_i u_j u_k \rangle$  и новые моменты второго порядка, описывающие корреляции пульсаций компонент скорости с давлением и скорости со вторыми производными скорости.

Для вновь появившихся статистических моментов также можно написать эволюционные уравнения типа (3.24), но проблемы это не решит, так как в уравнение для момента третьего порядка войдут момент четвертого порядка и новые моменты третьего порядка и так далее. Система уравнений для моментов все возрастающих порядков называется цепочкой уравнений Фридмана-Келлера и является незамкнутой в принципе. Проблема обрыва этой цепочки и получения замкнутой системы называется проблемой замыкания и является центральной проблемой на пути построения моделей турбулентности, предназначенных для описания осредненных полей скорости (температуры, концентрации примеси и т.д.).

Все полуэмпирические модели основаны на различных искусственных способах обрыва цепочки уравнений Фридмана-Келлера. Всякая процедура замыкания тем или иным способом выражает моменты порядка  $n$  через моменты низших порядков с помощью неких гипотез. Моделями замыкания первого порядка называют модели, выражающие моменты второго порядка через моменты первого порядка. Модели замыкания второго порядка оставляют моменты второго порядка, выражая через них моменты третьего порядка и т.д. Название полуэмпирические модели отражает тот факт, что все модели непременно содержат константы, требующие их определения из опыта.

Проблему замыкания можно проиллюстрировать и на примере уравнения для давления. Как известно, уравнение для определения давления получается из уравнения Навье-Стокса (3.12) путем применения к последнему операции  $\nabla$ . В результате получается уравнение

$$\Delta p = -\rho(\partial_i v_j \partial_j v_i - \partial_i f_i). \quad (3.25)$$

В уравнение (3.25) подставляем разложения (3.14)

$$\Delta P + \Delta p' = -\rho \partial_{ij}^2 (U_i U_j + U_i v_j + U_j v_i + v_i v_j) - \rho(\partial_i F_i + \partial_i f_i) \quad (3.26)$$

и после осреднения получаем

$$\Delta P = -\rho \partial_{ij}^2 (U_i U_j + \langle v_i v_j \rangle) - \rho \partial_i F_i. \quad (3.27)$$

Таким образом, в уравнении для средних величин снова появился тензор напряжений Рейнольдса. Для того чтобы выразить статистические моменты, включающие пульсации давления (см. уравнение (3.24)), потребуется написать уравнение для величины  $p'$ , что можно сделать, вычтя (3.27) из (3.26),

$$\Delta p' = -\rho \left[ \partial_{ij}^2 (U_i v_j + U_j v_i + v_i v_j - \langle v_i v_j \rangle) - \partial_i f_i \right]. \quad (3.28)$$

Это уравнение включает и тензор напряжений Рейнольдса и произведение пульсаций, что неминуемо приведет при попытках написания уравнений для моментов, включающих пульсации давления, к появлению новых моментов старших порядков.

### 3.3 Турбулентная вязкость

Самыми простыми являются модели первого порядка, которые тем или иным образом выражают тензор напряжений Рейнольдса через характеристики среднего поля скорости. При этом, практически все модели первого порядка оперируют понятием «турбулентная вязкость». В наиболее общем виде турбулентная вязкость вытекает из формулы Буссинеска, предложенной для тензора напряжений Рейнольдса по аналогии с выражением для вязких напряжений, принятом для несжимаемой жидкости (1.10)

$$\tau_{ij} = \frac{1}{3} \langle u_i^2 \rangle \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.25)$$

Важно подчеркнуть, что в отличие от молекулярной вязкости, турбулентная вязкость  $\nu_t$  не является свойством жидкости, а зависит от самого течения и даже для заданного течения может меняться от точки к точке. Другими словами, концепция турбулентной вязкости основана на рассмотрении некой «турбулентной жидкости», отличной по своим свойствам от вязкой жидкости в турбулентном течении.

Самый простой подход к рассмотрению турбулентных течений состоит в том, чтобы предположить, что турбулентная вязкость и энергия

турбулентных пульсаций  $k = \langle u_i^2 \rangle / 2$  для данного течения есть величины постоянные, не изменяющиеся от точки к точке. В этом случае уравнение Рейнольдса (3.19) принимает простейший вид

$$\partial_i U_i + U_j \partial_j U_i = -\rho^{-1} \partial_i P + (\nu + \nu_t) \partial_{jj}^2 U_i + \langle f_i \rangle. \quad (3.26)$$

Не смотря на чрезвычайную грубость такого предположения, оно позволяет в некоторых случаях правдоподобно описывать крупномасштабную структуру турбулентного течения. Полученное решения представляет в этом случае «ламинарный аналог» реального течения, так как получаемые профили скорости соответствуют ламинарным, а не турбулентным режимам течения. Значения турбулентной вязкости часто превышают при этом молекулярную вязкость на многие порядки. Так, например, для задач описания крупномасштабных течений в атмосфере принимают значения турбулентной вязкости в диапазоне  $10^2 \div 10^4 \text{ м}^2/\text{с}$ , в то время как молекулярная кинематическая вязкость воздуха равна  $2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$  (т.е. различие составляет 7-9 порядков!).

### 3.4 Длина пути смешения

Многие простые схемы замыкания опираются на идею Прандтля о длине пути смешения, характеристике потока, под которой понимают расстояние, проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение с окружающей жидкостью. Понятие пути смешения исходит из аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом в газах, когда характеристики молекул остаются постоянными в промежутках между соударениями.

Модель Прандтля применяется обычно к простым потокам, в которых средняя скорость имеет только одну компоненту (пограничные слои, каналы, трубы). Для определенности будем считать что  $\vec{U} = (U_x, 0, 0)$ , а существенным является только градиент средней скорости вдоль оси  $z$ . Тогда, следуя Прандтлю (1925г.), можно написать, что

$$\langle u_x u_z \rangle = -l^2 \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} \right)^2. \quad (3.27)$$

Формула (3.27) получается и из качественных соображений, использующих идею турбулентной вязкости. Действительно, если считать, что ве-

личина пульсаций скорости в турбулентном потоке пропорциональна градиенту средней скорости, то из размерных соображений появляется коэффициент с размерностью длины:  $u_i \approx l |\partial_z U_x|$ . Логично также предположить, что турбулентная вязкость тем больше, чем выше уровень турбулентных пульсаций. Соображения размерности снова требуют наличия множителя с размерностью длины:  $\nu_t \approx lu$ . Тогда

$$\nu_t \approx l^2 |\partial_z U_x|,$$

что в принципе эквивалентно формуле (3.27).

Перечислим некоторые задачи, в которых широко используется гипотеза Прандтля о пути смешения.

Свободный слой со сдвигом шириной  $d$ . В этом случае длина пути смешения считается постоянной

$$l = Cd,$$

где  $\tilde{N}$  - эмпирическая константа, величина которой имеет порядок  $\tilde{N} \approx 0,1$ .

Турбулентный пограничный слой. Предположение о том, что размер доминирующих вихрей пропорционален расстоянию от стенки  $z$ , приводит к выражению

$$l = Cz.$$

В этом случае эмпирическая константа  $\tilde{N} \approx 0,4$ .

Течение в открытом канале. Для канала глубиной  $d$  используется оценка

$$l = Cz \sqrt{1 - \frac{z}{d}}.$$

Эта формула применима и для закрытого канала. В этом случае глубина  $d$  заменяется на полуширину  $d/2$ . Формула работает и в случае круглой трубы (вместо глубины в ней появляется радиус канала). Значение эмпирической константы в каждом случае свое.

Важно отметить, что определение длины пути смешения (длины перемешивания), предложенное Прандтлем (3.27) не является единственно возможным. Широко используются и некоторые другие модели, опирающиеся на это понятие. Например, Тейлор ввел модель, в которой тензор напряжений Рейнольдса для одномерного турбулентного потока задается выражением



$$\langle u_x u_z \rangle = -U_x \partial_z U_x. \quad (3.28)$$

### 3.5 Модели переноса турбулентной вязкости

В общем случае турбулентная вязкость меняется от точки к точке и может изменяться со временем, то есть  $\nu_t = \nu_t(t, \vec{r})$ . К моделям переноса турбулентной вязкости относятся модели, в которых для турбулентной вязкости записывается эволюционное уравнение.

Формально, для любой переносимой течением скалярной величины  $a$ , для которой выполняется закон сохранения, можно записать уравнение вида

$$\partial_t a + (\vec{v} \nabla) a = \partial_j q_j + G + D, \quad (3.29)$$

где  $\vec{q}$  - поток величины  $a$  за счет диффузии,

$G$  - слагаемое, характеризующее генерацию величины  $a$ ,

$D$  - слагаемое, характеризующее диссипацию этой величины.

Если предположить, что полная вязкость (сумма молекулярной и турбулентной вязкостей) есть переносимая потоком скалярная величина, то для нее можно записать уравнение вида (3.29).

Приведем в качестве примера такой модели переноса турбулентной вязкости уравнение, предложенное Ни и Коважным для плоского пограничного слоя (Nee V., Kovaszny L. Simple phenomenological theory of turbulent shear flow, Phys.Fluids, 1969, V.12, P.473-484.)

$$\partial_t \nu_t + U_j \partial_j \nu_t = \partial_j ((\nu + \nu_t) \partial_j \nu_t) + A \nu_t |\partial_z U_x| - B \nu_t (\nu + \nu_t) \quad (3.30)$$

Выражение для потока полной вязкости записано в предположении, что коэффициент диффузии равен этой же полной вязкости (условие самодиффузии). Уравнение включает две эмпирические константы. Параметр  $A$  характеризует интенсивность генерации турбулентной вязкости за счет сдвига (авторы модели принимали его значение близким к 0,1) и параметр  $B$ , характеризующий «самосжигание» турбулентной вязкости.

### 3.6 Двухпараметрические модели

Большую группу моделей составляют модели, основанные на рассмотрении кинетической энергии пульсаций скорости  $k = \langle u_i^2 \rangle / 2$ . В моделях этого типа обычно появляется и вторая важная характеристика - скорость диссипации энергии  $\varepsilon$ . Турбулентная вязкость выражается через эти две величины. Соображения размерности приводят к соотношению

$$\nu_t = C \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Уравнение для энергии пульсаций скорости можно получить из уравнения (3.24), положив в нем  $j=i$  (не путаем в уравнении кинетическую энергию пульсаций и индекс  $k$ ):

$$\partial_i k + U_k \partial_k k = -\langle u_i u_k \rangle \partial_k U_i - \partial_k \left[ \left\langle u_k \left( \frac{u_i^2}{2} - \frac{p'}{\rho} \right) \right\rangle - \nu \partial_k k \right] + \langle u_i f_i \rangle, \quad (3.31)$$

однако, это уравнение по-прежнему включает неизвестные моменты и не снимает проблему замыкания.

Замыкание уравнения (3.31) приводит к широкой группе моделей переноса кинетической энергии. Не претендуя даже на беглый обзор полуэмпирических моделей этого типа, мы только приведем пример  $k-\varepsilon$  модели для описания течения в плоском пограничном слое на стенке

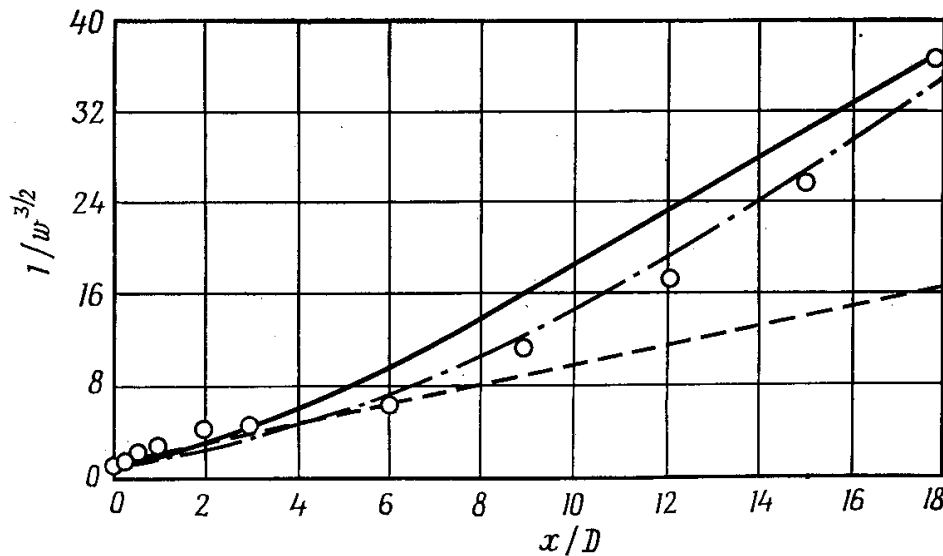


Рис.3.2.

$$\partial_i k + U_x \partial_x k + U_z \partial_z k = \partial_z (\nu_t \partial_z k) + \nu_t (\partial_z U_x)^2 - \varepsilon \quad (3.32)$$

$$\partial_t \varepsilon + U_x \partial_x \varepsilon + U_z \partial_z \varepsilon = \partial_z (v_t \partial_z \varepsilon) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} v_t (\partial_z U_x)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.33)$$

Замкнутую систему образуют при этом уравнения (3.19), (3.20), (3.25), (3.32) и (3.33).

Для иллюстрации возможностей полуэмпирических моделей на рисунке 3.2, взятом из книги [4], показаны результаты вычислений осесимметричного следа за шаром в несжимаемой жидкости с помощью различных моделей. Точками на рисунке обозначены экспериментальные данные, пунктирной линией - результаты расчета с помощью однопараметрической модели, штрих-пунктирной - результаты расчета с помощью  $k-\varepsilon$  модели, сплошной - результаты расчета с помощью другой двухпараметрической модели, специально разработанной для свободных течений.

Очевидно, что уравнения для статистических моментов, характеризующих более сложное течение, например, турбулентную конвекцию, должны включать соответствующие моменты для температурных пульсаций и смешанные моменты, характеризующие корреляции поля скорости и поля температуры.

В заключение еще раз отметим, что полуэмпирические модели представляют наиболее разработанное направление в изучении турбулентных течений, и что по ним существует подробная литература. Для начального систематического знакомства с ними можно порекомендовать удачно подобранные сборники статей под редакцией Фроста и Моулдена [4] и Кольмана [5].

Рекомендуемая литература к третьей главе:

А.С.Монин, А.М.Яглом, Статистическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, 1965. 639с.

А.С.Монин, А.М.Яглом, Статистическая гидромеханика. Ч.2. М.: Наука, 1967. 720с.

А.Дж.Рейнольдс, Турбулентные течения в инженерных приложениях. М.: Энергия, 1979. 408с.

Турбулентность. Принципы и применения. Под. ред. У.Фроста, Т.Моулдена. М.:Мир, 1980. 536с.

Методы расчета турбулентных течений. Под. ред. В.Кольмана. М.: Мир, 1984. 464с.